Der Spindrehimpuls in der allgemeinen Relativitätstheorie

Hehl, Friedrich

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 18, 1966, S.98-130

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Der Spindrehimpuls in der allgemeinen Relativitätstheorie

Von **Friedrich Hehl**

Vorgelegt von **E. Kröner**

(Eingegangen am 15. 6. 1966)

Übersicht: In seiner allgemeinen Relativitätstheorie hat *Einstein* den Energie-Impuls der Materie geometrisiert. Spinnende Materie besitzt aber neben den Translations- zusätzlich noch Rotationsfreiheitsgrade, die im Spindrehimpuls ihren Ausdruck finden; für dessen Beschreibung ist jedoch in der allgemeinen Relativitätstheorie keine geometrische Größe verfügbar. In diesem Artikel wird daher im Anschluß an Arbeiten von *Sciama, Kibble, Kröner* und dem Verfasser die dem Spindrehimpuls zugeordnete Raumgröße aufgesucht und eine *allgemein-relativistische Feldtheorie für Energie-Impuls und Spindrehimpuls* angegeben.

Im ersten Kapitel erläutern wir zuerst die unserer Arbeit zugrunde liegende Konzeption (§ 1). Wesentlich ist dabei, daß materieller Spindrehimpuls dem antisymmetrischen Teil der affinen Konnexion, der sog. Cartanschen Torsion äquivalent ist. § 2 gibt eine Literaturübersicht, und in § 3 führen wir etwas näher eine zwischen der Feldtheorie der Versetzungen und der allgemeinen Relativitätstheorie bestehende Analogie aus, die den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildete. In § 4 werden eine Reihe mathematischer Formeln aufgestellt, die wir später benötigen werden.

Das zweite Kapitel dient der eigentlichen Ausarbeitung der Theorie. In § 5 wird als physikalischer Erfahrungsraum der *allgemeinste metrische und affine Raum* eingeführt. Gegenüber dem Riemannschen Raume der allgemeinen Relativitätstheorie besitzt er als zusätzliche Struktur die Cartansche Torsion. Betten wir die Wirkungsfunktion der Materie in diesen Raum ein (§ 6), so folgen aus ihrer Invarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen gewisse Identitäten.

Wir definieren in § 7 den Energie-Impuls und den Spindrehimpuls der Materie *dynamisch* und können dann in § 8 die erwähnten Identitäten auswerten: die dynamisch definierten Energie-Impuls- bzw. Spindrehimpuls-Tensoren sind mit den entsprechenden *kanonischen* Tensoren, die aus dem Lagrange-Formalismus folgen, identisch. Zudem erhalten wir die explizite Form der *Erhaltungssätze* für Energie-Impuls und Drehimpuls.

Diese Ergebnisse gelten bei beliebiger Form der Feldgleichungen der Gravitation. Letztere stellen wir erst in § 9 mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzipes auf. Die Wahl einer bestimmten Wirkungsfunktion des Feldes führt zu den *Feldgleichungen*

$$\begin{aligned} \text{Einstein-Tensor} &= \text{kanon. Energie-Impuls,} \\ \text{(modifizierte) Cartansche Torsion} &= \text{kanon. Spindrehimpuls.} \end{aligned}$$

In § 10 diskutieren wird die dargelegte Theorie und schneiden einige noch offene Probleme an.

Summary: Einstein geometrized in his general theory of relativity energy-momentum of matter. Spinning matter is characterized besides the translational also through rotational degrees of freedom, and this fact manifests itself in spin-angular momentum. In general

relativity, however, there is no geometrical counterpart of spin-angular momentum. Therefore, following the work of Sciama, Kibble, Kröner and the author, we here look for the geometric quantity corresponding to spin-angular momentum and propose a general relativistic field theory for energy-momentum and spin-angular momentum.

In chapter one we first explain the concept underlying our work (§ 1). The essential point is the equivalence of spin-angular momentum of matter and the antisymmetric part of the affine connexion, the so-called Cartan's torsion. In § 2 we survey the literature, and in § 3 we discuss in some detail the analogy between field theory of dislocations and general relativity which was our starting point. In § 4 we list for later convenience some mathematical formulas.

We build up the proper theory in the second chapter. In § 5 we introduce as physical space the most general metric and affine space. Compared with Riemannian space of general relativity it has Cartan's torsion as an additive structure. If we imbed the action function of matter in this space, as is done in § 6, there follow certain identities from the invariance of the action function against general coordinate transformations.

Energy-momentum and spin-angular momentum of matter are defined dynamically in § 7. In § 8 we are then able to utilize the above mentioned identities: the dynamically defined energy-momentum and spin-angular momentum tensors are respectively identical with the corresponding canonical tensors following from Lagrangian formalism. Further we obtain explicitly the conservation theorems for energy-momentum and angular momentum.

These results are valid irrespective of the form of the field equations of gravitation, which we deduce only in § 9 with the help of Hamilton's principle. Choosing a certain action function of the field, we are lead to the field equations

Einstein's tensor = canonical energy-momentum,
(modified) Cartan's torsion = canonical spin-angular momentum.

In § 10 we discuss the proposed theory and raise some open problems.

Kapitel I

Warum sollte die allgemeine Relativitätstheorie beim Auftreten von Spindrehimpuls erweitert werden? Eine Sammlung heuristischer Gesichtspunkte

§ 1. Einleitung

Die Einsteinsche allgemeine Relativitätstheorie [28] beschreibt die Schwerewirkung makroskopischer Objekte. Ist etwa ein solches durch die Massendichte $\varrho(x)$ und die Vierergeschwindigkeit $u^i(x)$ spezifiziert, dann beträgt die Energie-Impuls-Dichte seiner Volumelemente

$$p^i = \varrho\, u^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Fragt man nun zusätzlich, wieviel Energie-Impuls in der Zeiteinheit in jedes Volumelement hinein- bzw. aus ihm herausfließt, so wird dies durch den metrischen *Energie-Impuls*-Tensor beantwortet, der (hier näherungsweise) durch

$$\sigma^{ij} = p^i\, u^j \tag{1.2}$$

gegeben ist.

Der symmetrische Tensor (1.2) fungiert in der Einsteinschen Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie als Quelle der Gravitation, in ihm entspringt also alle Schwere. Da die Potentialgröße der Feldgleichung die die Maßverhältnisse des Raum-Zeit-Kontinuums*) bestimmende Metrik g_{ij} ist, wird durch die Materie der ursprünglich Euklidische bzw. Minkowskische Raum der speziellen Relativitätstheorie zu einem Riemannschen Raume verformt. Der wesentliche Inhalt der allgemeinen Relativitätstheorie ist demgemäß, daß die Materie über den metrischen Energie-Impuls-Tensor ein vormals „ebenes" Raum-Zeit-Kontinuum krümmt.

Will man nun die Schwerewirkung mikroskopischer Objekte, also etwa eines Elektrons oder eines Protons beschreiben, so hat man zu berücksichtigen, daß diese nicht nur Translationsfreiheitsgrade besitzen; vielmehr ist den meisten Elementarteilchen eine Eigendrehung, ein Spin eingeprägt. Diese Rotationsfreiheitsgrade finden dynamisch im Auftreten eines *Spindrehimpulses* $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ ihren Ausdruck.

Da nicht einzusehen ist, warum bei spinnenden Teilchen (bzw. besser gesagt: bei spinnenden Feldern) der „Impuls" weiterhin der „Geschwindigkeit" proportional sein sollte, müssen wir wegen (1.1) und (1.2) erwarten, daß ihr Energie-Impuls-Tensor Σ^{ij} im allgemeinen asymmetrisch ist und deswegen die Einsteinsche Feldgleichung erweitert werden muß. Außerdem reicht die Riemannsche Geometrie wohl aus, um den im Tensor (1.2) erfaßten Freiheitsgraden der Translation Rechnung zu tragen, kommen aber auch die der Rotation ins Spiel, so hat man offenbar nach einer allgemeineren Geometrie für das Raum-Zeit-Kontinuum Ausschau zu halten. —

Einen Hinweis, was für eine Geometrie zu diesem Zwecke dienlich sein könnte, erhält man aus der Feldtheorie der *Versetzungen*. Es hat sich in den letzten Jahren gezeigt, daß man sich einen versetzten Kristall aus Elementarbereichen aufgebaut denken kann, die verschoben und unabhängig davon auch verdreht werden können, die also Translations- und Rotationsfreiheitsgrade besitzen. Die Verschiebung wird dabei im wesentlichen von Kräften, die Verdrehung von Spinmomenten verursacht.

Bei der differentialgeometrischen Beschreibung eines solchen Kontinuums stellt es sich heraus, daß die von Spinmomenten hervorgerufenen relativen Drehungen von benachbarten Elementarbereichen, die durch das Auftreten von Versetzungen realisiert werden, mit Hilfe eines dreistufigen Tensorfeldes $S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ erfaßt werden können; diese sog. Cartansche *Torsion* [13, 14] stellt den antisymmetrischen Teil der der geometrischen Beschreibung des Kontinuums zugrunde liegenden affinen Konnexion $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ dar:

$$S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} \overset{def}{=} \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}) \equiv \Gamma_{[\alpha\beta]}^{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \tag{1.3}$$

Die Versetzungstheorie liefert also einen Modellfall dafür, daß einer Geometrie, in der die einzelnen Punkte mit Rotationsfreiheitsgraden behaftet sind, eine asymmetrische Konnexion zugrunde gelegt werden muß. —

Betrachten wir nun wieder die allgemeine Relativitätstheorie. Im Sinne des

---

*) Wen die historische Entwicklung des Raumbegriffes bis hin zu den neuesten Forschungsergebnissen interessiert, den möchten wir auf das lesenswerte Buch „Das Problem des Raumes" von *Jammer* [55] hinweisen.

eben Gesagten werden wir nahezu zwangsläufig zu der Vorstellung geführt, daß der Spindrehimpuls $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ die rotatorischen Freiheitsgrade des Raum-Zeit-Kontinuums anregt und damit eine Abweichung von der Riemannschen Geometrie induziert. Diese Abweichung drückt sich in einer neuen unabhängigen geometrischen Feldgröße, nämlich der Torsion $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ mit ihren 24 funktionalen Freiheitsgraden aus. Es ist also kein Zufall, daß $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ und $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ die gleiche Stufe und Antisymmetrie besitzen.

„Nur die allgemeine Relativitätstheorie, welche die Variation der Weltmetrik ermöglicht, führt zur wahren Definition der Energie" bzw. des Energie-Impulses. Dieser Ausspruch *Weyls* ([116] p. 236) zeigt die singuläre Bedeutung eines Riemannschen Raum-Zeit-Kontinuums für das Konzept von Energie-Impuls. In entsprechender Weise führt nur eine Theorie, welche die Variation der Torsion zuläßt, zur wahren Definition des Spindrehimpulses. Der Spindrehimpuls der Materie ist nämlich genauso innig und notwendig mit der Torsion des Raum-Zeit-Kontinuums verbunden, wie der Energie-Impuls mit der Metrik.

Sammeln wir alle bis jetzt erwähnten Gesichtspunkte, so kommen wir zu folgender *Konzeption:* Wir gehen vom Minkowskischen Raum-Zeit-Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie aus. Sozusagen von außen werfen wir Materie mit dem Energie-Impuls Σ^{ij} und dem Spindrehimpuls $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ in dieses Kontinuum hinein. Denken wir uns zuerst noch den Spindrehimpuls „abgeschaltet", so *dehnt* der *Energie-Impuls* den Raum zu einem durch eine bestimmte Metrik g_{ij} charakterisierten Riemannschen Raum. Bei nun „angeschaltetem" *Spindrehimpuls* wird dieser Riemannsche Raum noch zusätzlich *tordiert*, d.h. er bekommt als neue Struktur die Torsion $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ aufgeprägt und weitet sich damit zu einem sog. Riemann-Cartanschen Raume.

Die in dieser Mitteilung vorgeschlagene Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie basiert hauptsächlich auf den Arbeiten von *Sciama* [99], *Kibble* [58] und *Kröner* u. d. Verfasser [48]. Im Anschluß sei nun eine ausführlichere Literaturübersicht und ein Einblick in die Versetzungstheorie gegeben. Wir streuen schon einzelne Formeln ein: bezüglich der dabei verwendeten Konventionen vergleiche man im Zweifelsfalle den § 4.

§ 2. Literaturübersicht

Costa de Beauregard [19, 20] und unabhängig davon *Weyssenhoff* u. *Raabe* [123] und *Papapetrou* [84] fanden, daß der *Energie-Impuls-Tensor* Σ_{ij} spinnender Materie im allgemeinen *asymmetrisch* ist. Man vergleiche dazu auch z. B. die neueren verwandten Arbeiten [21, 25, 46, 74, 95, 108, 109, 122]. Setzen wir nach dem Vorschlage von *Costa de Beauregard* [19] heuristisch die verallgemeinerte Einsteinsche Feldgleichung entsprechend

$$G_{ij} = k\,\Sigma_{ij} \tag{2.1}$$

an (G_{ij} = Einstein-Tensor, k = Gravitationskonstante), dann muß der Einstein-Tensor deswegen gleichfalls asymmetrisch sein.

Lehnt man sich eng an den Formalismus der allgemeinen Relativitätstheorie an, so kann diese Asymmetrie entweder von einer nun ebenfalls asymmetrischen Metrik g_{ij}, von einer asymmetrischen Konnexion Γ^k_{ij} oder auch von beidem gleichzeitig [98] herrühren. Da es keine Definitionsgleichung für den asymmetrischen Teil der Metrik gibt, die ihn erst physikalisch interpretierbar machen würde, wollen wir die Metrik — nicht aber die Konnexion — weiterhin als symmetrisch annehmen.

Ist ein gewöhnlicher Festkörper durch Kraftspannungen $\Sigma_{\alpha\beta}$ und Spinmomentenspannungen $\tau_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ beansprucht, so lauten nach *Voigt* [115] die Bedingungen für das Momentengleichgewicht (vgl. auch z. B. [49, 50, 113])

$$\nabla_\gamma \tau_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} - \Sigma_{[\alpha\beta]} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

Das vierdimensionale Analogon ist offensichtlich mit dem Spindrehimpuls $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ und dem Energie-Impuls Σ_{ij} der *Erhaltungssatz für den Drehimpuls**) (vgl. z. B. [17]):

$$\overset{*}{\nabla}_k \tau_{ij}^{\cdot\cdot k} - \Sigma_{[ij]} = 0 \qquad (i, j, k = 0, 1, 2, 3). \tag{2.3}$$

Wir haben ihn mit dem Differentialoperator (4.2) angeschrieben, da dies in einem Raume mit Torsion notwendig ist, wie man seit den allerdings den dreidimensionalen Fall betreffenden Arbeiten von *Stojanovitch* [106], *Kröner* [63] und *Stojanovitch* u. *Vujoshevitch* [107] weiß.

Der antisymmetrische Teil von (2.1), der in der allgemeinen Relativitätstheorie identisch verschwindet, ergibt mit (2.3)

$$k \overset{*}{\nabla}_k \tau_{ij}^{\cdot\cdot k} = G_{[ij]}. \tag{2.4}$$

In (5.26) werden wir sehen, daß sich $G_{[ij]}$ mit dem gemäß (5.23) aus der Torsion abgeleiteten Tensor $T_{ij}^{\cdot\cdot k}$ in jedem *metrischen* Raume ebenfalls als Divergenz schreiben läßt. Ein Vergleich von (2.4) und (5.26) führt deshalb, wenn wir eventuell auftretende Glieder weglassen, deren Divergenz verschwindet, auf die zuerst von *Sciama* [99] auf andere Weise abgeleitete Beziehung zwischen Spindrehimpuls und Torsion:

$$T_{ij}^{\cdot\cdot k} = k\, \tau_{ij}^{\cdot\cdot k}\,. - \tag{2.5}$$

Die Gleichungen (2.1) und (2.5) können mit der *Methode des kompensierenden Feldes*, auch lokale Eichtheorie genannt, ebenfalls deduziert werden. Ursprünglich von *Weyl* [117, 118, 119] speziell für das elektromagnetische Feld ausgearbeitet, erlangte dieses Verfahren, welches das Auftreten bestimmter Felder auf die Invarianzeigenschaften der Wirkungsfunktion zurückführt, in neuerer Zeit auch für andere Felder immer größere Bedeutung. Zusammenfassend hat es z. B. *Adamskii* [1] und allgemeinverständlich *Wigner* [124] beschrieben.

Im Falle der Schwerkraft wird aus der *Lorentz-Invarianz* einer materiellen

*) Gegenüber der Arbeit [48] sind die Konventionen etwas abgeändert.

Wirkungsfunktion die Existenz des Gravitationsfeldes und die es beherrschenden Gleichungen abgeleitet. Die grundlegende Arbeit stammt von *Utiyama* [114]. Er betrachtete aber nur homogene Lorentz-Transformationen und wurde zur allgemeinen Relativitätstheorie von 1916 geführt, da er zudem die Konnexion apriorisch als symmetrisch annahm. Erst *Sciama* [99] leitete im Anschluß an gewisse vorbereitende Rechnungen von *Weyl* [120] zu (2.1) und (2.5) äquivalente Feldgleichungen ab. Jedoch setzte er die Riemannsche Struktur der allgemeinen Relativitätstheorie voraus und wandte entsprechend seiner Zielsetzung das Verfahren des kompensierenden Feldes nur auf die dem Spindrehimpuls zugeordnete Transformation an. Kurz danach stellte *Kibble* [58] die vollständige Theorie der kompensierenden Felder für inhomogene Lorentz-Transformationen auf, die dann direkt zu den Feldgleichungen (2.1) und (2.5) führt. Man vergleiche hierzu auch die weiteren Arbeiten von *Sciama* [100, 101], *Brodskii* et al. [10, 11], *Sokolik* [102, 103], *Ivanenko* [54] und *Sokolik* u. *Konopleva* [104, 105].

Hauptsächlich im Anschluß an die Arbeit von *Sciama* [99] behandelte *Lenoir* [70] als Beispiel die Wechselwirkung zwischen Feldern vom Spin 1/2 bzw. 3/2 und der Gravitation. Bereits vorher hatte *Peres* [88] ausführlich mit einem äquivalenten Formalismus allgemein relativistische Spinorgleichungen diskutiert. Auf quantentheoretischer Basis untersuchten das entsprechende Problem *Kibble* [59] für Diracfelder und *Lemmer* [69] für Felder mit beliebigem Spin.*) — Bekanntlich wurde die Torsion schon früher in einigen „einheitlichen Feldtheorien" benutzt (vgl. z. B. *Einstein* [32], *Schrödinger* [97], *Tonnelat* [111, 112]). Mit diesen hat aber die hier angestrebte Geometrisierung des Spindrehimpulses offensichtlich nichts zu tun. Dagegen sind die verschiedenen Versionen der Theorie von *Finkelstein* [34, 35, 36] und *Finkelstein* u. *Ramsay* [37, 38], die ohne nähere Begründung ein mit einer Torsion (und einer Krümmung) ausgestattetes Raum-Zeit-Kontinuum annehmen, nicht im Sinne einer einheitlichen Feldtheorie zu verstehen. Sie versuchen eine Brücke zur Elementarteilchenphysik zu schlagen, ohne allerdings einen Zusammenhang zwischen Spindrehimpuls und Torsion zu sehen.

Eine Anzahl von Arbeiten sind deswegen lose mit unserer in § 1 erläuterten Konzeption und dem entsprechenden Formalismus verknüpft, weil in ihnen die alte Einsteinsche Idee des *Fernparallelismus* [30, 31] aufgegriffen und damit ein flacher Raum *mit* Torsion (vgl. z. B. *Eisenhart* [33], *Tonnelat* [112]) verwendet wird. *Møller* [79, 80, 81] hat eine solche Theorie aufgestellt, um das Problem der Lokalisierung der Gravitationsenergie zu lösen. Man vergleiche hierzu auch die Anmerkung von *Peres* [89]. Diese Theorie wurde durch *Chao* u. *Kohler* [16] sehr übersichtlich dargestellt und von *Pellegrini* u. *Plebanski* [87] erweitert. Schon früher hatte *Gürsey* [45] bestimmte Spinorgleichungen in einem jedoch nur konformen Raum-Zeit-Kontinuum mit Fernparallelismus untersucht. Dabei fand er u. a., daß der total antisymmetrische Teil der

---

*) *Anmerkung bei der Korrektur:* Inzwischen ist *Kuchař* [126] und *Bičák* [125] im Rahmen der Theorie von *Sciama* [99] und *Kibble* [58] die sog. Rainich-Geometrisierung (vgl. hierzu z. B. *Wheeler* [127]) spinorieller bzw. vektorieller Felder gelungen, was ein weiterer Hinweis auf Konsistenz und Leistungsfähigkeit einer allgemeinrelativistischen Theorie mit Torsion ist.

Torsion in der Wirbelgeschwindigkeit einer relativistischen Flüssigkeit ausdrückbar ist. Im Ansatz von *Rodichev* [91] — man beachte auch die Mitteilungen von *Braunss* [8, 9] — wird das nichtlineare Glied einer Spinorgleichung als Ausdruck der Torsion des Raum-Zeit-Kontinuums verstanden und nebenbei erwähnt, daß der Spin in dem betrachteten Spezialfalle die Torsion verursache. Diesen Arbeiten liegt allerdings ein etwas abgewandelter Fernparallelismus zugrunde.

Eine gewisse äußere Verwandtschaft mit den eben besprochenen Theorien mit Fernparallelismus besitzen die schon älteren auf *Fock* u. *Iwanenko* [39] zurückgehenden Versuche im Riemannschen Raume der allgemeinen Relativitätstheorie Vierbeine einzuführen, um die Wechselwirkung zwischen Fermionen und der Gravitation beschreiben zu können. Die Literatur über diese Frage ist äußerst umfangreich, als Beispiele seien nur die Arbeiten [12, 15, 26, 42, 71, 75, 83, 94] angeführt. —

Unsere Mitteilung wurde ursprünglich durch bestimmte Ergebnisse der Versetzungstheorie angeregt. Dies sei etwas ausführlicher im nächsten Paragraphen besprochen, in dem auch die entsprechende Literatur zitiert ist.

§ 3. Versetzungstheorie und Torsion

Die Versetzungstheorie kann nach *Kondo* [60] und *Bilby* et al. [5] in einem dreidimensionalen Raume mit Torsion formuliert werden. Auf diese Weise wurde zum ersten Male eine physikalisch anschauliche Interpretation der Torsion gefunden. Gestützt auf Modellbetrachtungen in der Versetzungstheorie, hat *Kröner* [62] vor einigen Jahren die Vermutung ausgesprochen, die dann von *Kröner* u.d. Verfasser [48] konkretisiert wurde, daß materieller Spindrehimpuls im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie einer Torsion des Universums äquivalent ist. Hier sollen nun die physikalischen Grundgedanken der Versetzungstheorie, die für die Analogie mit der allgemeinen Relativitätstheorie wichtig sind, plausibel gemacht werden; bezüglich der mathematischen Durcharbeitung und der Einzelheiten verweisen wir auf die zitierte Literatur.

Cosseratsches Kontinuum

Um die Jahrhundertwende entwickelten die Gebrüder *Cosserat* [18] die Theorie eines Kontinuums, dessen Bausteine nicht nur Translations-, sondern auch unabhängige Rotationsfreiheitsgrade besitzen. Zur Illustration betrachten wir die Abb. 1. Abb. 1a schematisiert ein solches Kontinuum im unverformten Ausgangszustand. Wir sehen, daß jedes Teilchen eine *eingeprägte Orientierung* besitzt, die im Prinzip meßbar ist.

Wenden wir nun *Kraft*spannungen $\sigma_{\alpha\beta}$ an (vgl. Abb. 1b), so werden die Translationsfreiheitsgrade des Kontinuums angeregt, d. h. die Teilchen ändern ihre gegenseitigen Abstände. Durch den aus der klassischen Elastizitätstheorie bekannten *Dehnungs*tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ wird dieser Verformungszustand eindeutig charakterisiert.

Nun besitzen die Teilchen aber auch unabhängige Rotationsfreiheitsgrade. Wir bezeichnen die durch ein Flächenelement dF_{γ} des Kontinuums hindurch-

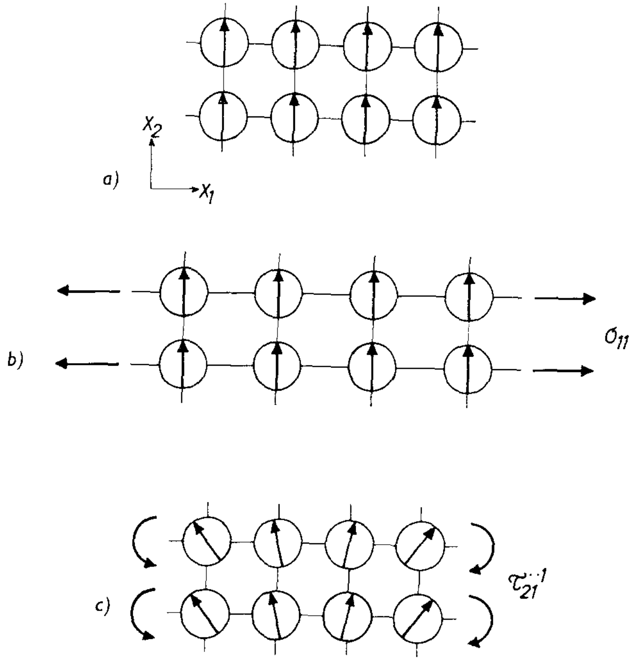

Abb. 1. Schema eines Cosseratschen Kontinuums
a) unverformter Ausgangszustand
b) gewöhnliche homogene Dehnung: Abstandsänderung der Teilchen verursacht durch Kraftspannungen σ_{11}
c) homogene Cosseratsche Krümmung: Orientierungsänderung der Teilchen verursacht durch Spinmomentenspannungen $\tau_{21}^{\cdot\cdot 1}$

greifenden Spindrehmomente mit $dt_{\varkappa\beta}\,(= -dt_{\beta\varkappa})$: dann sind die *Spinmomentenspannungen* $\tau_{\varkappa\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ entsprechend

$$dt_{\varkappa\beta} = \tau_{\varkappa\beta}^{\cdot\cdot\gamma}\, dF_\gamma \tag{3.1}$$

definiert. Genau diese bewirken aber eine unabhängige relative Drehung $d\vartheta_{\varkappa\beta}\,(= -d\vartheta_{\beta\varkappa})$ infinitesimal benachbarter Teilchen, wie man unschwer aus Abb. 1c erkennt. Die Spinmomentenspannungen werden also eine *Cosseratsche Krümmung*

$$K_{\gamma\varkappa\beta} = \partial_\gamma \vartheta_{\varkappa\beta} \tag{3.2}$$

verursachen. Der allgemeinste Verformungszustand kann durch das Wirken von Kraft- und Spinmomentenspannungen realisiert und geometrisch durch Dehnung und Krümmung beschrieben werden. Da der ganze Körper nach der Verformung immer noch ein Kontinuum darstellen soll, müssen Dehnung und Krümmung bestimmten Kompatibilitätsbedingungen genügen, die sozusagen die Nachbarschaftsverhältnisse der einzelnen Teilchen regeln.

Der Vollständigkeit halber seien noch zwei Bemerkungen angefügt, die für unsere späteren Betrachtungen allerdings unerheblich sind:

1. Das Cosseratsche Kontinuum besitzt als dritte Grunddeformation, man vergleiche hierzu beispielsweise die Arbeiten von *Günther* [44], *Schaefer* [93] und *Kessel* [57], die konstante Cosseratsche Drehung $\vartheta_{\varkappa\beta}$ aller Teilchen, die sich durch das Wirken *antisymmetrischer* Kraftspannungen einstellt (vgl. Abb. 2a). Diese Drehung geht in der weiter unten behandelten Versetzungstheorie nach *Kröner* [65] wegen der Periodizität der Idealkristalle verloren.

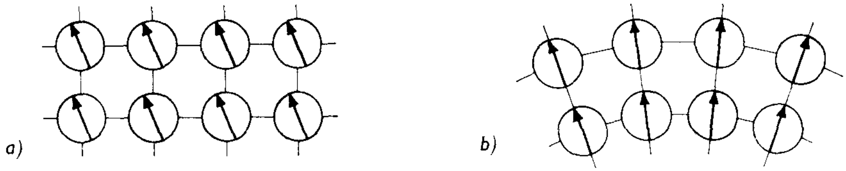

Abb. 2. Ergänzungen zum Cosseratschen Kontinuum
a) konstante Cosseratsche Drehung aller Teilchen
b) klassische Drehung der Teilchen durch inhomogene Dehnung

2. Bei *inhomogener* Dehnung $\varepsilon_{\varkappa\beta}$ werden die Teilchen bereits um einen Winkel $\omega_{\varkappa\beta}$ gedreht, wie aus Abb. 2b ersichtlich ist. Sie werden aber dabei gleichsam nur durch das Verschiebungsfeld mitgenommen, so daß dies die bereits aus der klassischen Elastizitätstheorie bekannte Drehung ist. Die entsprechende Krümmung ruft (nichtlokale) Momentenspannungen hervor, die nach *Kröner* u. d. Verfasser [47] im allgemeinen eine Größenordnung kleiner als die von der Cosseratschen Krümmung (3.2) erzeugten sind und daher vernachlässigt werden können.

Versetzungstheorie

Günther [44] hat erkannt, daß der Versuchskörper der Feldtheorie der Versetzungen, ein mit Versetzungen angefüllter Kristall, als ein verallgemeinertes Cosseratsches Kontinuum angesehen werden kann. Dies ist folgendermaßen zu verstehen:

In der Versetzungstheorie, beispielsweise in den zusammenfassenden Arbeiten von *Kröner* [62, 64], wird gezeigt, daß der geometrische Zustand eines versetzten Kristalls im linearisierten Falle mit Hilfe der affinen Konnexion

$$\Gamma_{\varkappa\beta\gamma} = -(\partial_\varkappa\varepsilon_{\beta\gamma} + \partial_\beta\varepsilon_{\gamma\varkappa} - \partial_\gamma\varepsilon_{\varkappa\beta}) - K_{\varkappa\beta\gamma} \tag{3.3}$$

beschrieben werden kann. Wir benutzten ein raumfestes, holonomes, aber sonst beliebiges Koordinatensystem $x^\varkappa$ im verformten Kristall. $\varepsilon_{\varkappa\beta}$ ist dabei der *Dehnungs*tensor; der Tensor $K_{\varkappa\beta\gamma}$ $(= -K_{\varkappa\gamma\beta})$, der das Analogon zur Cosseratschen Krümmung ist, beschreibt die *Strukturkrümmung* eines Kristalls, die sich nach *Nye* [82] in der Versetzungsdichte ausdrücken läßt:

$$K_{\varkappa\beta\gamma} = -\alpha_{\varkappa\beta\gamma} + \alpha_{\beta\gamma\varkappa} - \alpha_{\gamma\varkappa\beta}. \tag{3.4}$$

Qualitativ kann man (3.4) leicht aus Abb. 3c ablesen. Man sieht, daß sich wegen des Vorhandenseins von Versetzungen die Orientierung der Gitterstruktur ändert, während die mittleren Abstände der Gitterpunkte die gleichen bleiben, also die makroskopische Dehnung verschwindet.

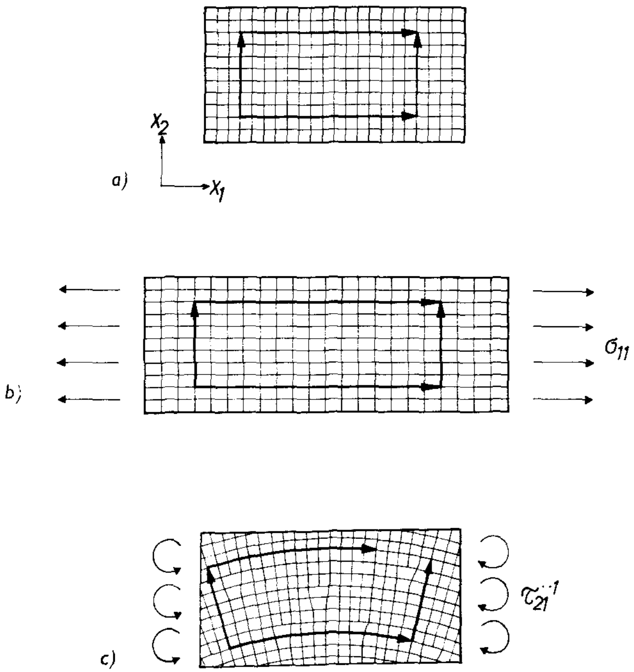

Abb. 3. Schema des Versuchskörpers der Versetzungstheorie
a) unverformter Kristall
b) durch Kraftspannungen σ_{11} homogen gedehnter Kristall: die mittleren Abstände der Gitterpunkte ändern sich
c) durch Spinmomentenspannungen $\tau_{21}^{\cdot\cdot 1}$ veranlaßt, wandern (Stufen-)Versetzungen ein und verursachen eine Strukturkrümmung des Kristalls: die mittleren Abstände der Gitterpunkte ändern sich nicht

Gegenüber dem Cosseratschen Kontinuum wird hier die Zahl der funktionalen Freiheitsgrade von $\varepsilon_{\alpha\beta}$ auf 6 und die von $K_{\alpha\beta\gamma}$ auf 9 erhöht. Verformungszustände vom Typ der Abb. 1b und 1c sollten aber ebenfalls im Kristall auftreten. In der Tat, ein (hier kubisch primitiver) Kristall der Abb. 3a antwortet gemäß Abb. 3b auf Kraftspannungen $\sigma_{\alpha\beta}$ mit einer Dehnung und auf Spinmomentenspannungen $\tau^{\gamma\beta\alpha}$ gemäß Abb. 3c, wenn man den Grenzübergang zum Kontinuum ausgeführt denkt, mit Einwandern von Versetzungen und damit wegen (3.4) mit einer Strukturkrümmung (vgl. z. B. [47]). Bei einer virtuellen Änderung der unabhängigen Deformationsgrößen Dehnung $\varepsilon_{\alpha\beta}$ bzw. Strukturkrümmung $K_{\alpha\beta\gamma}$ ändert sich also die Dichte f der *freien Energie des Kristalls*, isotherme Versuchsführung vorausgesetzt, entsprechend

$$\delta f = \sigma^{\alpha\beta}\, \delta\varepsilon_{\alpha\beta} - \tau^{\gamma\beta\alpha}\, \delta K_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.5}$$

Die Stellung der Indizes im 2. Term und damit auch sein Vorzeichen folgen dabei zwangsläufig aus den obigen Konventionen.

Das Auftreten der asymmetrischen Konnexion (3.3) ist von fundamentaler Wichtigkeit. Die Bedeutung ihres antisymmetrischen Teils, der *Torsion*, soll jetzt näher diskutiert werden:

Der differentialgeometrischen Beschreibung eines Kristalls mit Hilfe der obigen Konnexion liegt die Vorstellung zugrunde, daß man für die Geometrie eines deformierten Kristalls die in ihm vorhandenen Gittervektoren als Einheitsmaßstäbe nimmt. Verschiebt man etwa im spannungsfreien Kristall der Abb. 3a zwei infinitesimale, von einem Punkt ausgehende Vektoren jeweils parallel übereinander hinweg, so ergibt sich ein Parallelogramm. Lassen wir Spinmomentenspannungen auf den Kristall wirken, dann wandern Versetzungen ein und man erhält den Zustand der Abb. 3c. Wenn wir nun, wie vereinbart, weiterhin die Gittervektoren als Maßstäbe benutzen, so werden wir feststellen, daß das Parallelogramm weiterhin ein solches bleibt. Wir bemerken aber, daß es durch das Einwandern der Versetzungen aufgebrochen wurde, daß ein *Schließungsfehler* auftritt, der direkt ein Maß für die Versetzungsdichte ist.

Nun weiß man seit langem, daß auch in einem Raume mit Cartanscher Torsion keine infinitesimalen geschlossenen Parallelogramme möglich sind (vgl. z. B. *Eddington* [27]). Der Schließungsfehler ist, wie wir in (5.3) und in der Abb. 4 noch sehen werden, ein Maß für die Torsion. Daraus bzw. aus (3.3) und (3.4) erkennt man, daß die *Versetzungsdichte* einer Torsion äquivalent ist (*Kondo* [60], *Bilby* et al. [5]):

$$\alpha_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.6}$$

Lassen wir in einem vorher undeformierten Idealkristall Kraftspannungen $\sigma^{\alpha\beta}$ wirken, indem wir etwa fremde Atome in ihn „einfüllen", so verschwindet wegen (3.5) der letzte Term in der Konnexion (3.3): Sie ist also vom Riemannschen Typ. Lassen wir aber zusätzlich durch Anwendung von Spinmomentenspannungen $\tau^{\gamma\beta\alpha}$ Versetzungen einwandern, so tritt in (3.3) auch die Strukturkrümmung $K_{\alpha\beta\gamma}$ auf und die durch die Konnexion (3.3) erfaßte Geometrie ist eine allgemeinere, nämlich eine Riemann-Cartansche. Man sieht ohne weiteres die Analogie zu dem, was wir am Ende der Einleitung als unsere Konzeption bezüglich der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet haben. Nur daß eben die Versetzungsstatik dreidimensionaler Natur ist.

§ 4. Konventionen und mathematische Hinweise

Soweit nichts anderes festgesetzt wird, entnehmen wir sämtliche mathematischen Konventionen der Monographie von *Schouten* [96] und sämtliche physikalischen Konventionen, wie die Wahl der Maßeinheiten, dem Lehrbuch von *Landau-Lifschitz* [68].

Wir benutzen im allgemeinen die Komponentenschreibweise. Lateinische Indizes $i, j, k \ldots$ durchlaufen dabei die Werte 0, 1, 2, 3, griechische $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ nur die Werte 1, 2, 3. Über doppelt auftretende Indizes werde stets summiert. Eine runde Klammer um die betreffenden Indizes bedeutet Symmetrisierung, eine eckige Antisymmetrisierung [96]. Mit δ_j^i kürzen wir das Kronecker-Symbol und mit $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ das Christoffel-Symbol 2. Art ab. Tensoren werden mit lateinischen oder griechischen, Tensordichten im allgemeinen mit deutschen Buchstaben bezeichnet. —

Partielle Differentiation eines Feldes Φ schreiben wir wahlweise folgendermaßen:

$$\partial\Phi/\partial x^i \equiv \partial_i\Phi \equiv \Phi_{,i}. \tag{4.1}$$

Für die *kovariante* Differentiation benutzen wir das Zeichen ∇_i. Zudem führen wir zwei weitere Differentiationssymbole ein:

$$\overset{*}{\nabla}_i \overset{def}{=} \nabla_i + 2\,S_{ik}^{\cdot\cdot k}, \tag{4.2}$$

$$\overset{+}{\nabla}_i\Psi_j^{\cdots} \overset{def}{=} \nabla_i\Psi_j^{\cdots} + 4\,S_{i(j}^{\cdot\cdot k}\Psi_{k)}^{\cdots} = \overset{*}{\nabla}_i\Psi_j^{\cdots} + 2\,S_{ij}^{\cdot\cdot k}\Psi_k^{\cdots}. \tag{4.3}$$

(4.3) hat nur einen Sinn bei einem Feld, das genau einen kovarianten Index besitzt, die Zahl der kontravarianten Indizes ist dagegen gleichgültig.
Das vierdimensionale Volumelement sei

$$d\Omega = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3. \tag{4.4}$$

Dann gilt die Identität

$$\int d\Omega\,\partial(\Phi^{\cdots}_{\cdots}\Psi^{\cdots}_{\cdots}) = \int d\Omega\,\Phi\,\nabla\Psi + \int d\Omega\,\Psi\,\overset{*}{\nabla}\Phi, \tag{4.5}$$

da $\Phi^{\cdots}_{\cdots}\Psi^{\cdots}_{\cdots}$ eine kontravariante Vektordichte sein muß, wenn das Integral überhaupt eine invariante Bedeutung haben soll. Bei späteren Anwendungen können wir Oberflächenintegrale stets unberücksichtigt lassen. Da sich die linke Seite von (4.5) wegen des Gaußschen Satzes in ein solches umwandeln läßt, erhalten wir für die *partielle Integration* die nützliche Formel

$$\int d\Omega\,\Phi\,\nabla\Psi = -\int d\Omega\,\Psi\,\overset{*}{\nabla}\Phi. \tag{4.6}$$

Die skalare Dichte $\mathfrak{L}$ hänge von einem Felde Q und dessen Ableitungen ab:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(Q, \partial\,Q, \partial\,\partial\,Q\cdots). \tag{4.7}$$

Die sog. *Variationsableitung* ist dann folgendermaßen definiert:

$$\frac{\delta\,\mathfrak{L}}{\delta\,Q} \overset{def}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,Q} - \partial_k\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,Q_{,k}} + \partial_k\,\partial_l\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,Q_{,kl}} - + \cdots. \tag{4.8}$$

Zugleich verabreden wir, daß $\delta\mathfrak{L}/\delta g_{ij}$ bezüglich i und j symmetrisiert werde, falls g_{ij} ein symmetrisches Tensorfeld ist; Entsprechendes gelte für antisymmetrische Felder.
Nach der aus [68] entnommenen Konvention ist die Determinate der *Metrik* g_{ij} stets negativ. Die Größe

$$\varepsilon \overset{def}{=} \sqrt{-det.\,g_{ij}}, \tag{4.9}$$

deren kovariante Ableitung wegen (5.12) verschwindet

$$\nabla_i\varepsilon = 0, \tag{4.10}$$

transformiert sich bekanntlich wie eine skalare Dichte. Der Ausdruck $\varepsilon\,g^{ij}$

ist also eine Tensordichte. Seine Variation ergibt sich (vgl. z. B. [97]) zu

$$\delta(\varepsilon\, g^{ij}) = \varepsilon\, (g^{ij}\, g^{kl}/2 - g^{il}\, g^{kj})\, \delta g_{kl}. \tag{4.11}$$

Kapitel II

Eine affine und metrische Feldtheorie mit asymmetrischer Konnexion als Ausdruck der Geometrisierung von Energie-Impuls und Spindrehimpuls

§ 5. Postulate der Affinität und Metrik

Der Parallelverschiebung eines Vektors C^j legen wir das übliche *Postulat der Affinität*

$$dC^k = -\,\Gamma^k_{ij}\, C^j\, dx^i \tag{5.1}$$

mit der affinen Konnexion Γ^k_{ij} zugrunde. In einem Riemann-Cartanschen Raume, den wir nach Kapitel I für die Beschreibung materiellen Energie-Impulses und Spindrehimpulses brauchen, verschwindet der Tensor der *Torsion*

$$S_{ij}^{\cdot\cdot k} \overset{def}{=} \Gamma^k_{[ij]}\,, \tag{5.2}$$

anders als im Riemannschen Raume, im allgemeinen nicht mehr. Der Torsion läßt sich leicht eine anschauliche Bedeutung abgewinnen. Wählen wir an einem bestimmten Punkte zwei beliebige infinitesimale Vektoren und ver-

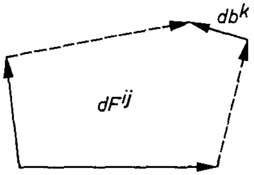

Abb. 4
Zur Bedeutung der Cartanschen Torsion: Schließungsfehler bei infinitesimalen Parallelogrammen (vgl. Abb. 3c)

schieben gemäß (5.1) jeweils den einen parallel über den anderen (Abb. 4), so weist das sich ergebende Parallelogramm der Fläche dF^{ij} nun einen *Schließungsfehler* der Größe

$$db^k = S_{ij}^{\cdot\cdot k}\, dF^{ij} \tag{5.3}$$

auf.

Durch (5.1) wird bei Vorgabe der Konnexion ein affin zusammenhängender Raum L_4 erklärt. In ihm läßt sich in üblicher Weise die *kovariante Ableitung* eines Vektorfeldes und durch sinngemäße Erweiterung die eines Tensorfeldes Ψ^U, wo U das Kollektiv aller Indizes bedeutet, definieren:

$$\nabla_i \Psi^U = \partial_i \Psi^U + \Gamma^k_{ij}\, f_{k\cdot A}^{\cdot j\cdot U}\, \Psi^A. \tag{5.4}$$

Die Konstante f hat bei einem Vektorfeld die Form

$$C^u \to f_{k\cdot a}^{\cdot j\cdot u} = \delta^u_k\, \delta^j_a\,. \tag{5.5}$$

Entsprechend gilt etwa bei gewissen Tensorfeldern

$$g_{uv} \to f^{\cdot jab}_{k \cdots uv} = -\delta^a_k \delta^j_u \delta^b_v - \delta^b_k \delta^j_v \delta^a_u \tag{5.6}$$

und

$$S^{\cdot\cdot w}_{uv} \to f^{\cdot jab \cdots w}_{k \cdots cuv} = -\delta^a_k \delta^j_u \delta^b_v \delta^w_c - \delta^b_k \delta^j_v \delta^a_u \delta^w_c + \delta^w_k \delta^j_c \delta^a_u \delta^b_v . \tag{5.7}$$

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir ab jetzt f als Operator auffassen, der auf die rechts von ihm stehenden Felder wirkt; (5.4) schreibt sich dann symbolisch

$$\nabla_i \Psi = \partial_i \Psi + \Gamma^k_{ij} f^{\cdot j}_k \Psi. \tag{5.8}$$

Sollte Ψ eine tensorielle Dichte sein, so muß (5.8) in bekannter Weise dadurch verallgemeinert werden, daß noch das Glied $-\Gamma^l_{il} \Psi$ addiert wird.

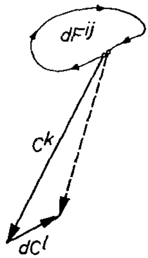

Abb. 5
Zur Bedeutung der Riemann-Christoffelschen Krümmung: wegabhängige Parallelverschiebung

Aus der affinen Konnexion läßt sich trotz ihres nichttensoriellen Charakters durch Differentiation ein Tensor, nämlich der Riemann-Christoffelsche *Krümmungstensor*, gemäß

$$R^{\cdots l}_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} 2\, \partial_{[i} \Gamma^l_{j]k} + 2\, \Gamma^l_{[i|m} \Gamma^m_{|j]k} \tag{5.9}$$

ableiten. Verschiebt man entsprechend Abb. 5 einen Vektor C^k parallel längs der Begrenzungslinie eines Flächenelementes $d\,F^{ij}$, so beträgt die Differenz $d\,C^l$ zwischen dem Vektor vor und nach der Verschiebung wegen (5.1), (5.9) und des Stokesschen Satzes

$$dC^l = -\tfrac{1}{2} R^{\cdots l}_{ijk} C^k dF^{ij} . \tag{5.10}$$

Ein nichtverschwindender Krümmungstensor bedingt also, daß die *Parallelverschiebung* von Vektoren und natürlich auch von Tensoren *wegabhängig* wird. —

Anschließend wollen wir nun die *Länge* eines Vektors definieren und verlangen, daß sich jene bei Parallelverschiebung *nicht* verändert. Dann erleidet der in Abb. 5 gezeichnete Vektor nur eine infinitesimale Drehung.

Verwirft man dieses Vorgehen, so hat man ein klares Konzept für die Längenmessung auszuarbeiten. Dies wird in den sog. rein affinen einheitlichen Feldtheorien (vgl. z. B. [97, 111, 112]) versäumt, so daß man nicht weiß, mit welchen Feldgrößen gemessene Längen bzw. Zeiten in Verbindung zu bringen sind. Die Weylsche einheitliche Feldtheorie (vgl. z. B. [116]) ist die einzige uns bekannte metrische Theorie, die eine durchgearbeitete Vorstellung über die Längenmessung vermittelt. In ihr bleiben die Längenverhältnisse eines in einem Punkte befindlichen Vektorbüschels bei Parallelverschiebung erhalten, nicht aber die Längen selbst. Abgesehen davon, daß die experimentellen Tatsachen dieser Hypothese zu widersprechen scheinen, scheiterte die Weylsche Theorie an anderen Schwierigkeiten (vgl. z. B. [86, 121]).

Wie im Riemannschen Raume führen wir deshalb zusätzlich zur Konnexion eine zweite fundamentale Struktur, den symmetrischen Metriktensor g_{ij} ein. Mag auch eine solch dualistisch aufgebaute Geometrie vom ästhetischen Standpunkte aus unbefriedigend sein, so scheint uns doch beim heutigen Stand der Dinge kein anderer Weg gangbar. Die Länge C eines Vektors C^i ist dann durch

$$C^2 \stackrel{def}{=} g_{ij}\, C^i\, C^j \tag{5.11}$$

bestimmt. In üblicher Weise können wir nun durch zusätzliches Einführen der kontravarianten Komponenten des Metriktensors Indizes heben und senken. Die Länge eines Vektors bzw. deren Quadrat, so hatten wir oben verlangt, solle sich bei Parallelverschiebung nicht ändern. Aus (5.11) folgt dann mit (5.1), da C^i ein beliebiger Vektor ist, das *Postulat der Metrik*

$$\nabla_k\, g_{ij} \equiv \partial_k\, g_{ij} - \Gamma^l_{ki}\, g_{lj} - \Gamma^l_{kj}\, g_{il} = 0. \tag{5.12}$$

Löst man (5.12) nach der Konnexion auf, so ergibt sich die äquivalente Relation

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + S_{ij}^{\cdot\cdot k} - S_{j\cdot i}^{\cdot k} + S^k_{\cdot ji}\,. \tag{5.13}$$

Ein affin zusammenhängender Raum L_4 mit der speziellen, nur von der Metrik und der Torsion abhängigen Konnexion (5.13), wird als allgemeinster metrischer Raum U_4 („Riemann-Cartanscher Raum") bezeichnet. Bei verschwindender Torsion degeneriert er zu einem Riemannschen Raume V_4.

Um der Konnexion Anschauung abzugewinnen, senken wir in (5.1) den Index k; mit der Abkürzung $\Gamma_{ijk} \stackrel{def}{=} g_{kl}\, \Gamma^l_{ij}$ folgt die Gleichung

$$dC_k = [-\,\Gamma_{i(jk)}\, dx^i]\, C^j + [-\,\Gamma_{i[jk]}\, dx^i]\, C^j. \tag{5.14}$$

Bei der Parallelverschiebung eines orthogonalen Vierbeins längs dx^i erkennt man, daß der Term in der ersten eckigen Klammer zu einer Dehnung $d\varepsilon_{jk}$ und der in der zweiten Klammer zu einer Drehung $d\omega_{jk}$ Anlaß gibt. Aus (5.13) erhält man für diese Größen

$$d\varepsilon_{jk} = -\,\Gamma_{i(jk)}\, dx^i = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_i\, g_{jk}\, dx^i \tag{5.15}$$

und

$$d\omega_{jk} = -\,\Gamma_{i[jk]}\, dx^i = (-\,\partial_{[j}\, g_{k]i} + K_{ijk})\, dx^i\,. \tag{5.16}$$

In (5.16) führten wir den schon in (5.13) auftretenden und zu (3.4) analogen Tensor der *Strukturkrümmung*

$$K_{ij}^{\cdot\cdot k} = -\,S_{ij}^{\cdot\cdot k} + S_{j\cdot i}^{\cdot k} - S^k_{\cdot ij} = -\,K_{i\cdot j}^{\cdot k} \tag{5.17}$$

ein. Er beschreibt gemäß (5.16) und (5.17) eine *durch die Torsion verursachte* relative Drehung, eine sog. Strukturdrehung benachbarter Volumelemente. In ihm kommen die von der Metrik unabhängigen Rotationsfreiheitsgrade der hier verwendeten Geometrie zum Ausdruck. Nebenbei sei noch bemerkt, daß die Differentialform (5.15) im Gegensatz zu (5.16) stets integrabel ist. — Später werden wir für den U_4 noch mehrmals Formeln benötigen, die hier zusammengestellt seien: Die ersten drei *Identitäten des Krümmungstensors* regeln das Vertauschen bestimmter Indizes desselben (vgl. z. B. [96] p. 144/5). Für jeden L_4 gelten wegen (5.9) und (5.8) die zwei ersten Identitäten in der Form

$$R_{(ij)k}^{\cdot\cdot\cdot l} = 0, \tag{5.18}$$

$$R_{[ijk]}^{\cdot\cdot\cdot l} = 2\,\nabla_{[i}S_{jk]}^{\cdot\cdot l} - 4\,S_{[ij}^{\cdot\cdot m}\,S_{k]m}^{\cdot\cdot l}\,; \tag{5.19}$$

die dritte Identität lautet für einen U_4 wegen (5.9) und (5.13)

$$R_{ij(kl)} = 0. \tag{5.20}$$

Die einzigen Integrabilitätsbedingungen für (5.9) sind bekannt als *Bianchi-Identität* (loc. cit. p. 146). Sie folgt aus (5.9) und (5.8) zu

$$\nabla_{[i}R_{jk]l}^{\cdot\cdot\cdot m} = 2\,S_{[ij}^{\cdot\cdot n}\,R_{k]nl}^{\cdot\cdot\cdot m}. \tag{5.21}$$

Aus (5.8) und (5.9) resultiert für die alternierende Ableitung eines Tensorfeldes μ die verallgemeinerte *Ricci-Identität* (loc. cit. p. 139):

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}\,\mu = \tfrac{1}{2}\,R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot l}\,f_{l}^{\cdot k}\,\mu - S_{ij}^{\cdot\cdot k}\,\nabla_{k}\,\mu\,. \tag{5.22}$$

Der Tensor

$$T_{ij}^{\cdot\cdot k} \overset{def}{=} S_{ij}^{\cdot\cdot k} + \delta_i^k\,S_{jl}^{\cdot\cdot l} - \delta_j^k\,S_{il}^{\cdot\cdot l} \tag{5.23}$$

erlaubt es die rechte Seite von (5.19) mit dem Differentialoperator (4.2) nach Verjüngen als divergenzartigen Ausdruck zu schreiben:

$$\tfrac{3}{2}\,R_{[kij]}^{\cdot\cdot\cdot k} = \overset{*}{\nabla}_k\,T_{ij}^{\cdot\cdot k}\,. \tag{5.24}$$

Diese Beziehung gilt wie (5.19) und (5.23) in jedem L_4. Machen wir uns aber jetzt die Identität (5.20) zu Nutze, so errechnet sich aus (5.24) für den Einstein-Tensor

$$G_{ij} \overset{def}{=} R_{ij} - \tfrac{1}{2}\,g_{ij}\,R_{k}^{\cdot k}, \tag{5.25}$$

wobei $R_{ij} \overset{def}{=} R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot k}$ den Ricci-Tensor bedeutet, die metrische Relation

$$\overset{*}{\nabla}_k\,T_{ij}^{\cdot\cdot k} - G_{[ij]} = 0\,. \tag{5.26}$$

Zuletzt wollen wir noch die Bianchi-Identität im Einstein-Tensor formulieren, da sie vermutlich in Analogie zur allgemeinen Relativitätstheorie als Energie-Impuls-Satz zu deuten sein wird. Mit (5.21), (5.25), (5.23) und (4.3) ergibt sich zwanglos als *verjüngte Bianchi-Identität*

$$\overset{*}{\nabla}_j\,G_{i}^{\cdot j} = T_{jk}^{\cdot\cdot l}\,R_{il}^{\cdot\cdot jk}\,. \tag{5.27}$$

§ 6. Wirkungsfunktion der Materie und ihre Invarianz

Die Materie werde vor der Deformation des Minkowskischen Raum-Zeit-

Kontinuums in orthogonalen Koordinaten durch die speziell relativistische Wirkungsfunktion

$$\tfrac{1}{c}\int d\Omega\, \mathfrak{L}\,(\Psi, \partial\,\Psi) \tag{6.1}$$

erfaßt (c = Lichtgeschwindigkeit). Dabei ist $\mathfrak{L}$ die Lagrangedichte der durch die tensoriellen Feldvariablen Ψ beschriebenen Materie. In Wirklichkeit hat man sich aber nach Kapitel I das physikalische Geschehen und damit auch die Wirkungsfunktion in einen U_4 eingebettet zu denken. Um (6.1) in diesem Raume eine kovariante Bedeutung zu geben, müssen wir partielle durch kovariante Ableitungen ersetzen, ko- und kontravariante Indizes unterscheiden und außerdem eventuell mit Hilfe der in (4.9) definierten Größe ε dafür sorgen, daß sich $\mathfrak{L}$ weiterhin wie eine Dichte transformiert. Auf diese Weise werden wir in Übereinstimmung mit dem Äquivalenzprinzip zu der Wirkungsfunktion

$$W_m = \tfrac{1}{c}\int d\Omega\, \mathfrak{L}\,(\Psi, \nabla\Psi, g) \tag{6.2}$$

geführt (g = Metrik).

Ausgeschrieben ergibt sich für (6.2) unter Beachtung von (5.8) und (5.13)

$$\begin{aligned} W_m &= \tfrac{1}{c}\int d\Omega\, \mathfrak{L}\,(\Psi, \partial_i\,\Psi + \Gamma_{ij}^{k}\, f_{k}^{\cdot j}\,\Psi, g) = \\ &= \tfrac{1}{c}\int d\Omega\, \mathfrak{L}\,(\Psi, \partial\,\Psi, g, \partial\, g, S)\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Über die kovariante Ableitung tritt also im allgemeinen zu den ursprünglichen Feldgrößen Ψ und zu der Metrik g jetzt noch die Torsion S hinzu. Nur wenn Ψ ein skalares Feld ist, verschwindet $f_{k}^{\cdot j}$ und die Torsion erscheint nicht in (6.3) (ein skalares Feld besitzt somit niemals Spindrehimpuls!). Bezeichnen wir alle *Variablen* zusammenfassend mit

$$Q \ni \Psi, g, S\,, \tag{6.4}$$

so läßt sich die *Wirkungsfunktion der Materie* (6.2) bzw. (6.3) folgendermaßen schreiben:

$$W_m = \tfrac{1}{c}\int d\Omega\, \mathfrak{L}\,(Q, \partial\, Q)\,. \tag{6.5}$$

Als *zusätzliche Bedingungen* für die Variablen Q sind die Feldgleichungen der Materie, das Postulat der Metrik (5.12) bzw. eine aus (6.3) folgende Relation aufzufassen:

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Psi} = 0; \qquad \nabla g = 0\,; \qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial\, S)} = 0\,. \tag{6.6}$$

Es ist übrigens eine reine Zweckmäßigkeitsfrage, ob man neben der Metrik die Torsion S oder die Strukturkrümmung K als weitere fundamentale Feldvariable nimmt. Wir entschieden uns für S, da es als antisymmetrischer Teil der Konnexion ständig explizit in Rechnungen auftritt.

Die Wirkungsfunktion W_m muß natürlich als Skalar *invariant* sein gegenüber infinitesimalen beliebigen Koordinatentransformationen:

$$\delta x^i = x'^i - x^i = \xi(x)\,. \tag{6.7}$$

Daraus können wir eine ganze Menge nützlicher Konsequenzen ziehen. Wir verwenden hierzu eine Methode, deren Prinzip schon in den Anfängen der allgemeinen Relativitätstheorie nach und nach erkannt wurde [72, 51, 73, 29], die aber erst bei *Rosenfeld* [92] in einer für uns brauchbaren Form eine elegante Darstellung gefunden hat.

(6.7) induziert vermöge des Transformationsgesetzes für Tensoren für die Variablen Q die „lokale Variation"

$$\delta Q \overset{def}{=} Q'(x') - Q(x) = \xi^i{}_{,j} f_i{}^j Q . \tag{6.8}$$

Die „substantielle Variation"

$$\delta^* Q \overset{def}{=} Q'(x) - Q(x) = \delta Q - \xi^i Q_{,i} \tag{6.9}$$

ist mit der partiellen Differentiation vertauschbar.

Aus der Invarianz von (6.5) folgt mit (6.8) und (6.9), da sich das Volumelement mit der Funktionaldeterminaten transformiert,

$$\delta W_m = \tfrac{1}{c} \left[\int d\Omega' \, \mathfrak{L}'(x') - \int d\Omega \, \mathfrak{L}(x)\right] = \tfrac{1}{c} \int d\Omega \left[\delta^* \mathfrak{L} + (\mathfrak{L}\, \xi)_{,i}\right] \equiv 0 . \tag{6.10}$$

Nun gilt

$$\delta^* \mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q} \delta^* Q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,k}} \delta^* Q_{,k} , \tag{6.11}$$

wenn man die Summationskonvention ab jetzt stets auch auf die Feldgrößen Q ausgedehnt denkt. Aus (6.10) erhält man mit (6.8), (6.9) und (6.11), da ξ^i und seine Ableitungen beliebig sind, die zwei nichttrivialen kovarianten Identitäten

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q} f_i{}^j Q + \mathfrak{L}\, \delta_i^j - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,j}} Q_{,i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,k}} (f_i{}^j Q)_{,k} \equiv 0 , \tag{6.12}$$

$$\mathfrak{M}_i{}^{(jk)} \equiv 0 . \tag{6.13}$$

Dabei wurde zur Abkürzung die Tensordichte

$$\mathfrak{M}_i{}^{jk} \overset{def}{=} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,k}} f_i{}^j Q \tag{6.14}$$

eingeführt.

Wir integrieren das letzte Glied der linken Seite von (6.12) partiell, um (6.14) substituieren zu können. Mit (4.8) ergibt sich so die *Rosenfeld-Identität*

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q} f_i{}^j Q + \mathfrak{L}\, \delta_i^j - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,j}} Q_{,i} + \mathfrak{M}_i{}^{jk}{}_{,k} \equiv 0 . \tag{6.15}$$

(6.13) ist eine zweite Rosenfeld-Identität und eine dritte, allerdings von den anderen abhängige, erhält man durch Differentation von (6.15) unter Beachtung von (6.13):

$$\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q} f_i{}^j Q\right)_{,j} + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q} Q_{,i} \equiv 0 . \tag{6.16}$$

Jetzt wollen wir die Kovarianz der Identitäten auch äußerlich dadurch sichtbar machen, daß wir kovariante Ableitungen einführen. Aus (6.15) resultiert

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q} f_i^{\cdot j} Q \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,j}} \nabla_i Q - \mathfrak{L}\delta_i^j - \overset{+}{\nabla}_k \mathfrak{M}_i^{\cdot jk} - \mathfrak{M}_i^{\cdot kl} S_{kl}^{\cdot\cdot j} \tag{6.17}$$

(6.13) ändert sich nicht

$$\mathfrak{M}_i^{\cdot(jk)} \equiv 0 \tag{6.18}$$

und für (6.16) folgt

$$\overset{+}{\nabla}_j \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q} f_i^{\cdot j} Q \right) + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q} \nabla_i Q \equiv 0\,. \tag{6.19}$$

Die Identitäten (6.17)—(6.19) gelten in jedem L_4 für alle Funktionen der Form (6.5). Nützlich für die Gravitationstheorie werden sie aber erst, wenn wir die Feldgrößen Q gemäß (6.4) identifizieren und die Bedingungen (6.6) beachten. Vorher müssen wir allerdings noch klären, was die in den Identitäten auftretenden Ausdrücke $\delta\mathfrak{L}/\delta g$ und $\delta\mathfrak{L}/\delta S$ physikalisch bedeuten.

§ 7. Dynamische Definition von Energie-Impuls und Spindrehimpuls

Energie-Impuls bei verschwindendem Spin

„Alle Teile eines materiellen Körpers, sowohl die Energieknoten als auch die Zwischenräume, erfahren ... in einem Gebiet, in welchem das Graviationspotential überall denselben Wert hat, lauter ganz gleiche Verzerrungen und Volumenänderungen, alle physikalischen Ereignisse eine gleichmäßige Verkürzung oder Verlängerung der Zeitdauer, alle elektrischen Ladungen, Stromstärken, alle elektrischen, magnetischen Gravitations-Feldstärken und Potentiale werden in bestimmten Verhältnissen geändert, welche von dem Wert des Potentials des Gravitationsfeldes, in welches man den Körper hineingebracht hat, abhängen."

Gustav Mie [78] p. 38

Diese Formulierung *Mies* läßt die universelle „abstandsändernde" Wirkung der Gravitation und die damit verbundene Analogie zur Dehnung eines Festkörpers besonders deutlich werden. Das Minkowskische Raum-Zeit-*Kontinuum* wird durch die Gravitation, da wir ja vorläufig den Fall ohne Spin betrachten, zu einem durch die Metrik g_{ij} erfaßbaren Riemannschen Kontinuum *gedehnt*. Die Energiedichte eines Kristalls reagiert auf eine virtuelle Änderung der Dehnung gemäß (3.5) mit Kraftspannungen. Genauso beantwortet die materielle Lagrangedichte, wie bereits *Hilbert* [51] erkannt hat, eine virtuelle Änderung der Metrik mit dem Auftreten eines *metrischen Energie-Impulses*

$$\varepsilon\, \sigma^{ij} = 2\, \frac{\delta\, \mathfrak{L}(Q, \partial Q)}{\delta\, g_{ij}}\,. \tag{7.1}$$

Diese sog. *dynamische* Definition des Energie-Impulses wird erst in der allgemeinen Relativitätstheorie möglich, die eine Variation der Weltmetrik zuläßt. Im starren Raum-Zeit-Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie wird hingegen der Energie-Impuls mit Hilfe des Noetherschen Theorems *kinematisch* als der Tensor definiert, für den aus der Translationsinvarianz der Lagrangedichte ein Erhaltungssatz folgt; bei Vorgabe der Lagrangedichte ist die letztere Definition vieldeutig und deshalb wenig befriedigend.

Spindrehimpuls

Lassen wir nun materiellen Spindrehimpuls zu, so spielt sich alles Geschehen in einem U_4 ab. Der Gedankengang, der in der Definition (7.1) seinen Niederschlag gefunden hat, ist zu suggestiv, als daß man ihn nicht in sinngemäßer Form auch beim Spindrehimpuls wiederholen möchte. Daher wollen wir die Struktur benachbarter Volumelemente des Raum-Zeit-Kontinuums gegeneinander ein wenig verdrehen, also die *Strukturkrümmung*, in der die rotatorischen Freiheitsgrade eines Kontinuums ihren Ausdruck finden, virtuell ändern. Die Energiedichte eines versetzten Kontinuums antwortet in einem solchen Falle gemäß (3.5) mit Spinmomentenspannungen und entsprechend wird die im Raum-Zeit-Kontinuum eingebettete materielle Lagrangedichte mit *Spindrehimpuls* [99, 48]

$$\varepsilon\, \tau_k^{\cdot ji} = \frac{\delta\, \mathfrak{L}(Q, \partial Q)}{\delta\, K_{ij}^{\cdot\cdot k}} \tag{7.2}$$

reagieren. τ^{kji} ist in den ersten beiden Indizes antisymmetrisch. Der relative Faktor zwischen den Definitionen (7.1) und (7.2) folgt eindeutig aus (3.3) und (3.5).

In der allgemeinen Relativitätstheorie kann es keine dynamische Definition des Spindrehimpulses geben, da in ihrem V_4 die Strukturkrümmung identisch verschwindet. Spinnende Materie bricht also die infinitesimalen Parallelogramme des V_4 auf (vgl. Abb. 4) und weitet ihn zu einem U_4, der zusätzlich durch eine Strukturkrümmung K bzw. eine Torsion S charakterisiert ist.

Nach (6.4) ist allerdings nicht das in (7.2) auftretende K, sondern S die Feldgröße. Deshalb definieren wir zur Vereinfachung den *Pseudo*spindrehimpuls gemäß [48]

$$\varepsilon\, \mu_k^{\cdot ji} = \frac{\delta\, \mathfrak{L}(Q, \partial Q)}{\delta\, S_{ij}^{\cdot\cdot k}}\,. \tag{7.3}$$

Er ist in den letzten beiden Indizes antisymmetrisch. Aus (7.3) folgen mit der Kettenregel, mit (6.6), (5.17) und (7.2) die beiden nützlichen Umrechnungsformeln

$$\mu^{ijk} = -\tau^{ijk} + \tau^{jki} - \tau^{kij}, \tag{7.4}$$

$$\tau^{ijk} = \mu^{[ji]k}\,. \tag{7.5}$$

Deshalb kann der Spindrehimpuls auch über (7.5) mit Hilfe von (7.3) definiert werden. (7.4) und (7.5) haben übrigens die gleiche Form wie die Relationen, die Strukturkrümmung und Torsion miteinander verbinden.

Energie-Impuls allgemein

Die Definition (7.1) möge ab jetzt auch in einem U_4 gültig sein. Da der Energie-

Impuls Σ_{ij} bei vorhandenem Spindrehimpuls $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ wegen des Drehimpulssatzes (2.3) nun im allgemeinen einen antisymmetrischen Teil besitzt, kommen wir zwangsläufig zu dem Ansatz

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \overset{*}{\nabla}_k \tau_{ij}^{\cdot\cdot k} + F_{(ij)} \,. \tag{7.6}$$

$F_{(ij)}$ ist dabei eine bestimmte Funktion, die mit $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ verschwindet.

$\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ wird wohl den symmetrischen und den antisymmetrischen Teil von Σ_{ij} in einer ähnlichen Weise beeinflussen; deshalb schreiben wir für den *asymmetrischen Energie-Impuls* [48]

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \overset{*}{\nabla}_k (\tau_{ij}^{\cdot\cdot k} - \tau_{j\cdot i}^{\cdot k} + \tau^{k}_{\cdot ij}) \,. \tag{7.7}$$

Das relative Vorzeichen der beiden letzten Glieder ist wegen der Symmetrieforderung wohl bestimmt; ein gemeinsamer Faktor bleibt aber, selbst wenn wir den sehr suggestiven Ansatz unter dem Differentiationssymbol akzeptieren, beliebig. Trotzdem ist unsere Wahl auch nur mit den uns bisher zur Verfügung stehenden Informationen naheliegend, da sich (7.7) mit (7.4) entsprechend

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \overset{*}{\nabla}_k \mu_{ij}^{\cdot\cdot k} \tag{7.8}$$

schreiben läßt — und $\mu_{ij}^{\cdot\cdot k}$ zweifellos eine „natürlich" definierte Größe ist. Erst in § 8 wird durchsichtig werden, warum der Ansatz (7.8) notwendig ist. $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ stellt sich nämlich mit dem kanonischen Spindrehimpuls als identisch heraus. Dann sollte aber auch der Energie-Impuls durch den kanonischen Tensor gegeben sein — und der durch (7.7) definierte Tensor wird sich gerade als kanonischer Tensor erweisen.

Nachdem wir die Wahl von (7.7) solchermaßen plausibel gemacht haben, wollen wir fortan den dynamischen Energie-Impuls-Tensor durch diese Gleichung *postulieren*. In einer analogen Theorie mit Vierbeinen [99, 58], ergibt sich jener Tensor in natürlicherer Weise; allerdings erhält man dann direkt keine Aufspaltung der Form (7.7), die ja auch in der speziellen Relativitätstheorie eine Rolle spielt [3, 4, 92, 53].

§ 8. Erhaltungssätze

Wir wollen nun in die Identitäten (6.17)—(6.19) die dynamischen Definitionen für den Energie-Impuls und den Spindrehimpuls einführen.

Kanonische Tensoren und Drehimpulssatz

Aus (6.17) erhalten wir so mit (6.4), (5.6), (7.1), (5.7), (7.3), (6.6) und (4.3)

$$\begin{aligned}\varepsilon\,(\sigma_i^{\cdot j} + 2\,\mu_m^{\cdot jk} S_{ki}^{\cdot\cdot m} + \mu_i^{\cdot kl} S_{kl}^{\cdot\cdot j}) &= \\ = \mathfrak{L}\,\delta_i^j - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_{,j}} \nabla_i \Psi + \overset{*}{\nabla}_k \mathfrak{M}_i^{\cdot jk} + 2\,\mathfrak{M}_m^{\cdot jk} S_{ki}^{\cdot\cdot m} + \mathfrak{M}_i^{\cdot kl} S_{kl}^{\cdot\cdot j} .\end{aligned} \tag{8.1}$$

(8.1) muß u. a. für beliebige Torsion gelten. Daraus folgt dann durch Koeffizientenvergleich unter Beachtung von (6.14) und (6.6)

$$\varepsilon\,\mu_i^{\cdot jk} \equiv \mathfrak{M}_i^{\cdot jk} = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\Psi_{,k}}\,f_i^{\cdot j}\,\Psi + \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,g_{,k}}\,f_i^{\cdot j}\,g\,. \tag{8.2}$$

Die erforderliche Antisymmetrie von $\mu_i^{\cdot jk}$ in den letzten beiden Indizes ist durch die Identität (8.1) sichergestellt. Mit (7.5) ergibt sich aus (8.2) endgültig für den *Spindrehimpuls*

$$\varepsilon\,\tau^{ijk} \equiv \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\Psi_{,k}}\,f^{[ji]}\,\Psi\,, \tag{8.3}$$

da der letzte Term von (8.2) bei der Antisymmetrisierung verschwindet. Schöpft man den Rest von (8.1) aus, so erhält man mit (8.2), (4.10) und (7.8) für den *asymmetrischen Energie-Impuls* letztlich

$$\varepsilon\,\Sigma_i^{\cdot j} \equiv \mathfrak{L}\,\delta_i^j - \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\Psi_{,j}}\,\nabla_i\Psi\,. \tag{8.4}$$

(8.3) und (8.4) zeigen uns, daß die dynamisch definierten Tensoren τ^{ijk} und $\Sigma_i^{\cdot j}$ mit den *kanonischen* Tensoren identisch sind. Denn genau in der angegebenen Weise werden letztere im speziell relativistischen Lagrange-Formalismus mit Hilfe des Noetherschen Theorems definiert (vgl. z. B. [17])*). So wird hier also der Lagrange-Formalismus der speziellen Relativitätstheorie sozusagen auf höherer Ebene reproduziert.

Der antisymmetrische Teil der dynamischen Definition (7.7) des Energie-Impulses beinhaltet natürlich den *Drehimpulserhaltungssatz* [99, 58, 48]:

$$\overset{*}{\nabla}_k\,\tau_{ij}^{\cdot\cdot k} - \Sigma_{[ij]} \equiv 0\,. \tag{8.5}$$

Obwohl es bekanntlich in einem nicht-Minkowskischen Raume im allgemeinen keinerlei Sinn hat, einen Bahndrehimpuls etwa entsprechend $x_{[i}\,\Sigma_{j]}^{\cdot k}$ zu definieren, da diese Bildung nicht kovariant ist, besitzt der Drehimpulssatz (8.5) eine zur speziellen Relativitätstheorie analoge Form (vgl. z. B. [17]): lediglich der Differentialoperator ∂ ist durch $\overset{*}{\nabla}$ ersetzt!

Ist in einem *Spezialfalle* der kanonische Energie-Impuls-Tensor überall *symmetrisch*, so folgt mit (8.5)

$$\Sigma_{[ij]} = \overset{*}{\nabla}_k\,\tau_{ij}^{\cdot\cdot k} = 0 \tag{8.6}$$

und mit (7.7)

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{(ij)} = \sigma_{ij} + 2\,\overset{*}{\nabla}_k\,\tau^k_{\cdot(ij)}\,. \tag{8.7}$$

Eine Asymmetrie des kanonischen Energie-Impuls-Tensors ist also für das Auftreten von Spindrehimpuls wohl hinreichend, aber nicht notwendig. Auch spinnende Materie kann einen symmetrischen kanonischen Energie-

*) Unterschiedliche Faktoren sind konventionsbedingt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für (8.5).

Impuls besitzen*). Gemäß (8.6) bedeutet diese Symmetrie, daß der Spindrehimpuls für sich erhalten bleibt und daher *nicht in Bahndrehimpuls umgewandelt* werden kann (vgl. z.B. [24]).

Rosenfeld [92] hat bekanntlich mit Hilfe der von ihm gefundenen Identitäten (6.13), (6.15), (6.16) aus einem im V_4 der allgemeinen Relativitätstheorie eingebetteten kanonischen Energie-Impuls-Tensor den „wahren" metrischen Tensor errechnet. Die entsprechende von ihm angegebene Formel**) ist zu (7.7) analog, der Spindrehimpuls wird aber rein kinematisch gemäß (8.3) definiert. Allerdings ist in der hier dargelegten Theorie, wie wir oben gesehen haben, (7.7) gegenteilig zu deuten: der Tensor, welcher Energie-Impuls richtig lokalisiert, ist der kanonische, der metrische ist nur eine Hilfsgröße.

Energie-Impulssatz

Unter dem ersten Differentiationssymbol der Identität (6.19) stehen die Glieder der linken Seite von (6.17). Behalten wir daher (8.1) im Auge, so ergibt sich aus (6.19) mit (6.6) und (7.3)

$$\overset{-}{\nabla}_j (\sigma_i^{\cdot j} + 2\,\mu_m^{\cdot jk}\, S_{ki}^{\cdot\cdot m} + \mu_i^{\cdot kl}\, S_{kl}^{\cdot\cdot j}) - \mu_l^{\cdot kj}\, \nabla_i\, S_{jk}^{\cdot\cdot l} \equiv 0\,. \tag{8.8}$$

Nun substituieren wir (7.8) in (8.8) und erhalten mit der Volumkraftdichte f_i

$$\overset{-}{\nabla}_j\, \Sigma_i^{\cdot j} \equiv f_i \overset{def}{=} \mu_l^{\cdot kj}\, \nabla_i\, S_{jk}^{\cdot\cdot l} - \overset{-}{\nabla}_j\, (\overset{+}{\nabla}_k \mu_i^{\cdot jk} + \mu_i^{\cdot kl}\, S_{kl}^{\cdot\cdot j})\,. \tag{8.9}$$

Die rechte Seite von (8.9) werten wir mit Hilfe der Ricci-Identität (5.22) und der 2. Identität des Krümmungstensors (5.19) aus. Beachtet man (5.20) und (7.5), so errechnet sich schließlich der *Energie-Impuls-Erhaltungssatz* zu [99, 58]

$$\overset{-}{\nabla}_j \Sigma_i^{\cdot j} \equiv \tau_{jk}^{\cdot\cdot l}\, R_{il}^{\cdot\cdot jk}\,. \tag{8.10}$$

Auf spinnende Materie wirkt daher eine zur Riemann-Christoffelschen Krümmung proportionale *Kraft*! Es ist von vornherein klar, daß f_i von der Art sein muß, daß es beim Übergang zu der speziellen Relativitätstheorie verschwindet, weil $\Sigma_i^{\cdot j}$ den kanonischen Tensor darstellt. Erwähnt sei, daß eine ähnliche Kraft auch im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie, also in einem V_4 auftritt ([77], vgl. auch z. B. [85, 110]), wenn auch in einer uns unnatürlicher erscheinenden Weise.

Da die Erhaltungssätze (8.5) und (8.10), wie aus ihrer Ableitung ersichtlich ist, bei beliebiger Form der Feldgleichungen der Gravitation und des Spins gelten, werden sie manchmal auch als „starke" Erhaltungssätze bezeichnet.

---

*) Unter Ausnützung dieser Tatsache schlugen *Hilgevoord* u. *de Kerf* [52] in einer kürzlich erschienenen interessanten Arbeit im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie eine neue kovariante Definition des Gesamtspins eines Feldes vor. Sie arbeiteten aber nicht mit dem eigentlichen Lagrange-Formalismus, so daß ein Vergleich mit den von uns erhaltenen Ergebnissen eine separate Betrachtung erfordert.

**) In dieser Formel tritt wie in (7.7) jene eigenartige Linearkombination der $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ auf, die uns von vornherein vermuten ließ, daß sie irgendeine Projektion der in der Konnexion (5.13) vorhandenen entsprechenden Linearkombination der Torsion in den „dynamischen" Bereich darstellt.

§ 9. Wirkungsfunktion des Feldes, Hamiltonsches Prinzip und Feldgleichungen

Allgemein

Die Wirkungsfunktion des Feldes wird sich wie die Wirkungsfunktion der Materie (6.5) als Volumintegral darstellen lassen:

$$W_f = \frac{1}{2\,kc} \int d\Omega\, \mathfrak{B}\,(g, \partial\, g, S, \partial\, S)\,. \tag{9.1}$$

k drücke sich folgendermaßen in der Newtonschen Gravitationskonstanten γ aus:

$$k = \frac{8\,\pi}{c^4}\,\gamma \approx 2 \cdot 10^{-48}\,\mathrm{dyn}^{-1}; \quad [k] = \mathrm{Kraft}^{-1}\,. \tag{9.2}$$

$\mathfrak{B}$ muß dann die Dimension einer reziproken quadratischen Länge besitzen. Variieren wir im Integranden von (6.5) und (9.1) die unabhängigen Feldgrößen g und S und lassen dabei deren Variationen an den Integrationsgrenzen verschwinden, so liefert das Hamiltonsche Prinzip

$$\delta\, W_f + \delta\, W_m = 0 \tag{9.3}$$

wegen der aus (7.1) und (7.3) fließenden Relation

$$\delta\, W_m = \frac{1}{2\,c} \int d\Omega\, \varepsilon\, (\sigma^{ij}\, \delta g_{ij} + 2\, \mu_k^{\cdot ji}\, \delta S_{ij}^{\cdot\cdot k}) \tag{9.4}$$

die Gleichungen

$$-\frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta g_{ij}} = k\, \varepsilon\, \sigma^{ij}\,, \tag{9.5}$$

$$-\frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta S_{ij}^{\cdot\cdot k}} = 2\, k\, \varepsilon\, \mu_k^{\cdot ji}\,. \tag{9.6}$$

Da Σ^{ij} und τ^{ijk} die entscheidenden physikalischen Größen sind, beachten wir (7.8) und (7.5) und erhalten dann als *Feldgleichungen*

$$-\frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta g_{ij}} - \frac{1}{2}\, g^{li}\, \overset{*}{\nabla}_k\, \frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta S_{jk}^{\cdot\cdot l}} = k\, \varepsilon\, \Sigma^{ij}\,, \tag{9.7}$$

$$-\frac{1}{2}\, g^{l[i} \frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta S_{j]k}^{\cdot\cdot l}} = k\, \varepsilon\, \tau^{ijk}\,. \tag{9.8}$$

Speziell

Die Wahl einer Lagrangedichte $\mathfrak{B}$ des Feldes fällt nicht schwer. Vergleichen wir den aus Invarianzforderungen abgeleiteten Energie-Impuls-Satz (8.10) mit der rein geometrischen Relation (5.27) und ebenso den Drehimpulssatz (8.5) mit (5.26), so kann man eigentlich die weiter unten deduzierten Feldgleichungen (9.21) und (9.22) sofort ablesen. Gleichzeitig erkennt man, daß die Wirkungsfunktion des Feldes W_f in Analogie zur allgemeinen Relativitätstheorie offenbar mit dem *Krümmungsskalar* $R \stackrel{def}{=} g^{ij} R_{ij}$ zu bilden sein wird. Übrigens ist R wegen der Identitäten (5.18) und (5.20) der *einzige* aus dem Krümmungstensor durch Verjüngen entstehende nichtverschwindende Skalar. Wir schreiben also mit der Abkürzung $\mathfrak{g}^{ij} \stackrel{def}{=} \varepsilon g^{ij}$

$$W_f = \frac{1}{2\,kc} \int d\Omega\, \mathfrak{R} = \frac{1}{2\,kc} \int d\Omega\, \varepsilon\, R = \frac{1}{2\,kc} \int d\Omega\, \mathfrak{g}^{ij} R_{ij}\,. \tag{9.9}$$

$\mathfrak{R}$ besitzt im Gegensatz zu dem in (9.1) definierten $\mathfrak{B}$ 2. Ableitungen der Metrik, die aber wegen ihres linearen Vorkommens durch partielle Integration weggeschafft werden können. Für die nur 1. Ableitungen von g enthaltende *effektive Lagrangedichte*

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \stackrel{def}{=} 2\, \mathfrak{g}^{ij} \left(\Gamma^k_{l[i} \Gamma^l_{k]j} + \Gamma^l_{li} S_{jk}{}^{\cdot\cdot k} \right) \tag{9.10}$$

gilt nämlich die Relation

$$\mathfrak{R} = \widetilde{\mathfrak{R}} + \partial_i \left(2\, \mathfrak{g}^{k[j} \Gamma^{i]}_{jk}\right). \tag{9.11}$$

(9.11) kann durch Einsetzen von (9.10) leicht bestätigt werden, sofern wir (4.10) und (5.9) beachten.

Die *Variation* von (9.9) errechnet sich wegen (9.11) zu

$$\delta W_f = \frac{1}{2\,kc}\, \delta \int d\Omega\, \mathfrak{R} = \frac{1}{2\,kc}\, \delta \int d\Omega\, \widetilde{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2\,kc} \int d\Omega\, \left[\mathfrak{g}^{ij}\, \delta R_{ij} + R_{ij}\, \delta \mathfrak{g}^{ij}\right]. \tag{9.12}$$

Zwar besitzt $\widetilde{\mathfrak{R}}$ nicht selbst den Charakter einer skalaren Dichte, wohl aber nach (9.12) seine Variation. Wie wir aus (9.10) entnehmen, wird für unseren Spezialfall die Feldgleichung (9.7) höchstens 2. Ableitungen von g enthalten und (9.8) linear in S sein. Für die Variation des Ricci-Tensors erhalten wir aus (5.9) die affine Relation

$$\delta R_{ij} = 2\, \nabla_{[k}\, \delta \Gamma^k_{i]j} + 2\, S_{ki}{}^{\cdot\cdot l}\, \delta \Gamma^k_{lj}\,. \tag{9.13}$$

Die Variation der metrischen Dichte $\mathfrak{g}^{ij}$ entnehmen wir der bereitgestellten Relation (4.11) und beachten die Definition (5.25) des Einstein-Tensors:

$$R_{ij}\, \delta \mathfrak{g}^{ij} = -\, \varepsilon \left(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R_k^{\cdot k}\right) \delta g_{ij} = -\, \varepsilon\, G^{ij}\, \delta g_{ij}\,. \tag{9.14}$$

Wir setzen (9.13) und (9.14) in (9.12) ein. Integrieren wir partiell gemäß (4.6), berücksichtigen (4.2), (4.10), (5.12) und (5.23), so resultiert daraus

$$\delta W_f = \frac{1}{2\,kc} \int d\Omega\, \varepsilon \left[-\, G^{ij}\, \delta g_{ij} + 2\, T_k^{\cdot ji}\, \delta \Gamma^k_{ij}\right]. \tag{9.15}$$

Variieren wir die Metrik, so wird sich eine variierte Konnexion einstellen. Diese muß natürlich wieder metrisch sein:

$$\overset{\Gamma+\delta\Gamma}{\nabla}_k \left(g_{ij} + \delta g_{ij}\right) = 0. \tag{9.16}$$

Wenn wir den Tensor

$$\Delta^{uvw}_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^u_i\,\delta^v_j\,\delta^w_k + \delta^u_j\,\delta^v_k\,\delta^w_i - \delta^u_k\,\delta^v_i\,\delta^w_j \tag{9.17}$$

benutzen, der Linearkombinationen nach Art des Christoffel-Symbols herstellt, so erhalten wir mit (5.12) aus (9.16)

$$\delta\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\,\Delta^{uvw}_{jil}\,(\nabla_u \delta g_{vw}/2 - g_{wx}\,\delta S_{uv}^{\cdot\cdot x})\,. \tag{9.18}$$

Etwas umständlicher hätte man (9.18) auch direkt aus (5.13) errechnen können. Wir setzen die Zwangsbedingung (9.18) in (9.15) ein, integrieren partiell mit Hilfe von (4.6), ordnen etwas um und beachten dabei (5.26). Aus dem resultierenden Ausdruck können wir die beiden gesuchten Variationsableitungen entnehmen:

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\delta\widetilde{\mathfrak{R}}}{\delta g_{ij}} = -\,G^{ij} + \overset{*}{\nabla}_k\,(T^{ijk} - T^{jki} + T^{kij})\,, \tag{9.19}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\,g^{li}\,\frac{\delta\widetilde{\mathfrak{R}}}{\delta S_{jk}^{\cdot\cdot l}} = -\,2\,(T^{ijk} - T^{jki} + T^{kij})\,. \tag{9.20}$$

Substitution in (9.7) bzw. (9.8) liefert die *Feldgleichungen* (*Sciama* [99], *Kibble* [58], *Kröner* u. d. Verfasser [48])

$$G^{ij} = k\,\Sigma^{ij}\,, \tag{9.21}$$

$$T^{ijk} = k\,\tau^{ijk}\,. \tag{9.22}$$

Wir lösen die lineare Gleichung (9.22) nach der Torsion auf und setzen sie in die linke Seite von (9.21) ein; man erhält so eine bestimmte *partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:*

$$G^{ij}\,(g,\,\partial\,g,\,\partial\,\partial\,g,\,k\,\tau,\,k\,\partial\,\tau) = k\,\Sigma^{ij}\,. \tag{9.23}$$

Zusammen mit dem Energie-Impuls-Satz (8.10) sind dies 20 Gleichungen für folgende 50 Unbekannte: $10\,g_{ij}$, $16\,\Sigma_{ij}$ und $24\,\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$. Die Feldgleichungen der Materie $(6.6)_1$ müssen also zusätzlich noch 30 Beziehungen zwischen den erwähnten Unbekannten erzwingen.

Bei verschwindendem Spindrehimpuls $\tau_{ij}^{\cdot\cdot k}$ geht (9.23) selbstverständlich in die Einsteinsche Feldgleichung über. Hier hat man dann, wenn wir die Symmetrie des Einstein-Tensors sofort in Rechnung stellen und damit $\Sigma_{[ij]} = 0$ identisch erfüllen, 14 Gleichungen für 20 Unbekannte ($10\,g_{ij}$, $10\,\Sigma_{ij}$). In der Näherung des „idealen Gases" kann man die Zahl der Unbekannten auf 15 erniedrigen (vgl. z. B. [68]), so daß nur noch 1 Relation, nämlich die „Zustandsgleichung der Materie" notwendig ist, um einen konsistenten Satz von Gleichungen zu erhalten.

Die *Erhaltungssätze* für Energie-Impuls (8.10) bzw. für Drehimpuls (8.5) hatten wir ohne Präjudizierung irgendwelcher Feldgleichungen abgeleitet. Deswegen müssen sie speziell auch für (9.21) und (9.22) identisch erfüllt sein, eine Tatsache, die man leicht mit Hilfe der geometrischen Relationen (5.27) und (5.26) nachweist.

§ 10. Diskussion und Ausblick

Im Verlaufe aller unserer Rechnungen setzten wir den tensoriellen Charakter der materiellen Feldvariablen Ψ voraus. Die Theorie auch auf *spinorielle Variable* auszudehnen, ist ohne weiteres möglich. Grundsätzlich neue Aspekte dürften sich dabei aber nicht ergeben.

Die Hauptschwierigkeit der oben entwickelten Theorie erwächst bei der Behandlung des *Maxwellschen Feldes*. Dessen kanonischer Energie-Impuls-Tensor ist, wenn man den üblichen Ansatz für die Lagrangedichte macht, nicht eichinvariant. Andererseits weist aber der in die allgemeine Relativitätstheorie gewöhnlicherweise eingehende metrische Tensor, der sich durch vierdimensionale Verallgemeinerung der Maxwellschen Spannungen ergibt, unbefriedigende Züge auf. Man vergleiche hierzu z.B. *Bopp* [7] und *Costa de Beauregard* u. *Goillot* [22, 23]. So erscheint es denkbar, daß man durch eine neue Wahl der Lagrangedichte den erwähnten Defekt beheben kann. Der physikalische Grund für diese Schwierigkeiten dürfte übrigens darin liegen, daß der Gesamtdrehimpuls des ruhemasselosen Photons nicht eindeutig in Spin- und Bahnanteil gespaltet werden kann. —

Die Feldgleichung (9.22) läßt eine Torsion nur an Stellen zu, an denen materieller Spindrehimpuls vorhanden ist. Eigentlich hätten wir erwartet, daß die Torsion auch ausgestrahlt werden kann, daß also am Spindrehimpuls aller Materie ein *universelles Spinfeld* entspringt, das etwa einer Differentialgleichung 2. Ordnung gehorcht. Wie man den Energie-Impuls gemäß (9.21) als Quelle der Gravitation, genauso könnte man dann den Spindrehimpuls als Quelle dieses Spinfeldes verstehen. Hypothesen über ein solches Feld gibt es schon lange, wie man etwa dem interessanten Artikel von *Fraser* [40] entnehmen kann*). Zudem wird die Lagrangedichte in (9.9) wegen $\mathfrak{R} = \mathfrak{g}^{ij} R_{(ij)}$ nur mit dem symmetrischen Teil des *Ricci-Tensors* gebildet, der *antisymmetrische Teil*, der eigene Freiheitsgrade besitzt, geht *verloren*, was uns unbefriedigend erscheint.

Ein dritter Punkt legt ebenfalls die Verallgemeinerung der Lagrangedichte nahe. Wegen (9.2) lauten die Feldgleichungen in Dimensionsform

$$1/(\text{Länge})^2 = (1/\text{Kraft}) \cdot \text{Impulsflußdichte}, \tag{10.1}$$

$$1/\text{Länge} = (1/\text{Kraft}) \cdot \text{Drehimpulsflußdichte}. \tag{10.2}$$

Faßt man den Spindrehimpuls neben dem Energie-Impuls als unabhängige dynamische Größe auf, so würde man in seiner Feldgleichung eine neue Naturkonstante von der Dimension eines reziproken Momentes erwarten, etwa nach dem Schema

$$1/(\text{Länge})^2 = (1/\text{Moment}) \cdot \text{Drehimpulsflußdichte}. \tag{10.3}$$

Die Gravitationskonstante k könnte man abspalten und würde so zu einer *elementaren Länge l* als neuer Naturkonstanten geführt, was natürlich ganz im

*) Da Neutrinos „Spindrehimpuls und weiter nichts" sind (nach *Jensen*), wäre vielleicht ein solches universelles Spinfeld mit ihnen bzw. der schwachen Wechselwirkung in Verbindung zu bringen. Es scheint nämlich nicht ausgeschlossen zu sein, daß die schwache Wechselwirkung universeller Natur ist — und nur dann wäre eine Geometrisierung in Analogie zur Gravitation sinnvoll.

Sinne der Analogie zwischen allgemeiner Relativitätstheorie und Versetzungstheorie liegt. Schon *Riemann* hat in seinem Habilitations-Kolloquium ([90] p. 23) erwähnt, daß der (dreidimensionale) Raum eine diskrete Struktur besitzen könnte, ein Gedanke, der wohl zuerst wieder von *Ambarzumian* u. *Iwanenko* [2] zur Diskussion gestellt und seitdem immer wieder aufgegriffen wurde (vgl. z. B. [6, 41, 66, 67, 76]).

Den drei erwähnten Gesichtspunkten könnte man in der Wirkungsfunktion (9.9) durch den Zusatzterm *)

$$^1W_f = \frac{l^2}{2\,kc}\int d\Omega\ \varepsilon\ R_{[ij]}\ R^{[ij]} \tag{10.4}$$

Rechnung tragen, der sich mit (5.25) und (5.26) in

$$^1W_f = \frac{l^2}{2\,kc}\int d\Omega\ \varepsilon\ (\overset{*}{V}_k\ T_{ij}^{\cdot\cdot k})\ (\overset{*}{V}_l T^{ijl}) \tag{10.5}$$

umschreiben läßt. Für die Torsion folgte eine Differentialgleichung, und es existierte deshalb ein universelles Spinfeld, der antisymmetrische Teil des Ricci-Tensors wäre berücksichtigt und außerdem hätten wir einer elementaren Länge Platz eingeräumt. Die schon erwähnte Parallelität zwischen den Erhaltungssätzen (8.5), (8.10) und den geometrischen Relationen (5.26), (5.27) läßt aber Zweifel aufkommen, ob sich die Untersuchung von (10.4) bzw. (10.5) lohnt.

Meinem Lehrer, Prof. *E. Kröner*, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für Unterstützung in jeglicher Beziehung. Herrn Prof. *M. Kohler* bin ich für mancherlei Hilfe und Dank verpflichtet.

Literatur

[1] *V. B. Adamskii:* Local invariance and the theory of compensating fields. Soviet Phys.-Uspekhi **4**, 607 (1962).

[2] *V. Ambarzumian* u. *D. Iwanenko:* Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons. Z. Physik **64**, 563 (1930).

[3] *F. J. Belinfante:* On the spin angular momentum of mesons. Physica **6**, 887 (1939).

[4] *F. J. Belinfante:* On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields. Physica **7**, 449 (1940).

[5] *B. A. Bilby, R. Bullough* and *E. Smith:* Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. (London) **A 231**, 263 (1955).

[6] *D. I. Blokhintsev:* On experimental verification of homogeneity and isotropy of space. Phys. Letters **12**, 272 (1964).

[7] *F. Bopp:* Ist der Poynting-Vektor beobachtbar? Ann. Physik (Leipzig) (7) **11**, 35 (1963).

*) Bestünde ein Zusammenhang mit der schwachen Wechselwirkung, so könnte man etwa aus einer ihrer Kopplungskonstanten $\varkappa \approx 10^{-49}$ dyn cm^4 (vgl. z. B. [56]) eine elementare Länge $l \approx (\varkappa\, k)^{1/4} \approx 10^{-24}$ cm ableiten.

[8] *G. Braunss:* Nichtlineare Spinorgleichungen und affiner Zusammenhang. Z. Naturforsch. **19a**, 825 (1964).

[9] *G. Braunss:* On the rôle of the group 0_4 of local complex orthogonal transformations in a nonlinear theory of elementary particles. Z. Naturforsch. **20a**, 649 (1965).

[10] *A. M. Brodskii, D. Ivanenko* and *G. A. Sokolik:* A new treatment of the gravitational field. Soviet Phys.-JETP **14**, 930 (1962).

[11] *A. M. Brodskii, D. Ivanenko* and *H. A. Sokolik:* A new conception of the gravitational field. Acta Phys. Hung. **14**, 21 (1962).

[12] *F. Cap, W. Majerotto, W. Raab* and *P. Unteregger:* Spinor calculus in Riemannian manifolds. Fortschr. Physik **14**, 205 (1966).

[13] *E. Cartan:* Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. C. R. Acad. Sc. (Paris) **174**, 593 (1922).

[14] *E. Cartan:* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativitée généralisée I, I (suite), II. Ann. Ec. Norm. Sup. (3) **40**, 325 (1923); **41**, 1 (1924); **42**, 17 (1925).

[15] *K. L. Chao:* Untersuchungen zur relativistischen Theorie des Spinelektrons im Riemannschen Raum (Dissertation). Braunschweig 1962.

[16] *K. L. Chao* u. *M. Kohler:* Vierbein-Formulierung der Theorie des Schwerefeldes. Z. Naturforsch. **20a**, 753 (1965).

[17] *E. M. Corson:* Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave-equations. London-Glasgow: Blackie & Son 1953.

[18] *E.* et *F. Cosserat:* Théorie des corps déformables. Paris: Hermann et Fils 1909.

[19] *O. Costa de Beauregard:* Sur la dynamique des milieux doués d'une densité de moment cinetique propre. C. R. Acad. Sc. (Paris) **214**, 904 (1942).

[20] *O. Costa de Beauregard:* Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac. J. Math. Pures Appl. **22**, 85 (1943).

[21] *O. Costa de Beauregard:* Translational inertial spin effect with moving particles. Phys. Rev. **134**, B 471 (1964).

[22] *O. Costa de Beauregard:* L'effet inertial de spin du photon. C. R. Acad. Sc. (Paris) **258**, 5167 (1964).

[23] *O. Costa de Beauregard* et *C. Goillot:* Autre méthode de calcul de l'effet inertial de spin sur les particules en mouvement. Application au cas de la réflexion limite du photon. C. R. Acad. Sc. (Paris) **257**, 1899 (1963).

[24] *J. S. Dahler* and *L. E. Scriven:* Theory of structured continua. I. General consideration of angular momentum and polarization. Proc. Roy. Soc. (London) **A 275**, 504 (1963).

[25] *W. G. Dixon:* On a classical theory of charged particles with spin and the classical limit of the Dirac equation. Nuovo Cimento (10) **38**, 1616 (1965).

[26] *J. S.* and *Y. P. Dowker:* Particles of arbitrary spin in curved spaces. Proc. Phys. Soc. (London) **87**, 65 (1966).

[27] *A. S. Eddington:* The mathematical theory of relativity; repr. 2nd ed.. Cambridge: University Press 1960.

[28] *A. Einstein:* Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Physik (Leipzig) (4) **49**, 769 (1916).

[29] *A. Einstein:* Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. p. 1111 (1916).

[30] *A. Einstein:* Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. p 217 (1928).

[31] *A. Einstein:* Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. p. 224 (1928).

[32] *A. Einstein:* Grundzüge der Relativitätstheorie; 2. Auflage. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1960.

[33] *L. P. Eisenhart:* Non-Riemannian geometry. New York: Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 1927.

[34] *R. Finkelstein:* Spacetime of the elementary particles. J. Math. Phys. **1**, 440 (1960).

[35] *R. Finkelstein:* Spinor fields in spaces with torsion. Ann. Physics (N.Y.) **12**, 200 (1961).

[36] *R. Finkelstein:* Elementary interactions in spaces with torsion. Ann. Physics (N.Y.) **15**, 223 (1961).

[37] *R. Finkelstein* and *W. Ramsay:* The strong couplings in a space with torsion. Ann. Physics (N.Y.) **17**, 379 (1962).

[38] *R. Finkelstein* and *W. Ramsay:* The weak and the strong couplings and general covariance. Ann. Physics (N.Y.) **21**, 408 (1963).

[39] *V. Fock* et *D. Iwanenko:* Géométrie quantique linéaire et déplacement parallèle. C. R. Acad. Sc. (Paris) **188**, 1470 (1929).

[40] *J. T. Fraser:* Some consequences of a linear vector theory of inertial fields. J. Franklin Inst. **272**, 460 (1961).

[41] *Yu. A. Gol'fand:* Extension of quantum mechanics to the case of discrete time. Soviet Phys.-JETP **20**, 1537 (1965).

[42] *H. S. Green:* Dirac matrices, teleparallelism and parity conservation. Nuclear Phys. **7**, 373 (1958).

[43] *W. Günther:* Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik. Abh. Braunschw. Wiss. Ges. **6**, 207 (1954).

[44] *W. Günther:* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abh. Braunschw. Wiss. Ges. **10**, 195 (1958).

[45] *F. Gürsey:* General relativistic interpretation of some spinor wave equations. Nuovo Cimento (10) **5**, 154 (1957).

[46] *F. Halbwachs:* Théorie relativiste des fluides à spin. Paris: Gauthier-Villars 1960.

[47] *F. Hehl* u. *E. Kröner:* Zum Materialgesetz eines elastischen Mediums mit Momentenspannungen. Z. Naturforsch. **20a**, 236 (1965).

[48] *F. Hehl* u. *E. Kröner:* Über den Spin in der allgemeinen Relativitätstheorie: Eine notwendige Erweiterung der Einsteinschen Feldgleichungen. Z. Physik **187**, 478 (1965).

[49] *E. Hellinger:* Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Enc. math. Wiss. **4**, Art. 30. Leipzig: Teubner 1914.

[50] *K. Heun:* Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik. Enc. math. Wiss. **4**, Art. 11. Leipzig: Teubner 1914.

[51] *D. Hilbert:* Die Grundlagen der Physik I. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. p. 395 (1915).

[52] *J. Hilgevoord* and *E. A. de Kerf:* The covariant definition of spin in relativistic quantum field theory. Physica **31**, 1002 (1965).

[53] *R. Iskraut:* Bemerkungen zum Energie-Impuls-Tensor der Feldtheorien der Materie. Z. Physik **119**, 659 (1942).

[54] *D. Ivanenko:* Tetradic and compensational theory of gravitation. C. R. Acad. Bulgare Sc. **17**, 801 (1964).

[55] *M. Jammer:* Das Problem des Raumes. Die Entwicklung der Raumtheorien (Übers. a. d. Engl.). Darmstadt: Wissenschaftl. Buchgesellschaft 1960.

[56] *G. Källén:* Elementarteilchenphysik (Übers. a. d. Engl.). Mannheim: Bibliographisches Institut 1965.

[57] *S. Kessel:* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums. Abh. Braunschw. Wiss. Ges. **16**, 1 (1964).

[58] *T. W. B. Kibble:* Lorentz invariance and the gravitational field. J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[59] *T. W. B. Kibble:* Canonical variables for the interacting gravitational and Dirac fields. J. Math. Phys. **4**, 1433 (1963).

[60] *K. Kondo:* On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech. p. 41 (1952).
[61] *E. Kröner:* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Arch. Rational Mech. Anal. **4**, 273 (1960).
[62] *E. Kröner:* Die neuen Konzeptionen der Kontinuumsmechanik der festen Körper. Phys. stat. sol. **1**, 3 (1961).
[63] *E. Kröner:* Zum statischen Grundgesetz der Versetzungstheorie. Ann. Physik (Leipzig) (7) **11**, 13 (1963).
[64] *E. Kröner:* Plastizität und Versetzungen. In Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 2, 9. Kap.; 5. Aufl.. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft 1964.
[65] *E. Kröner:* Das physikalische Problem der antisymmetrischen Spannungen und der sogenannten Momentenspannungen. Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. München, p. 143 (1964).
[66] *C. Lanczos:* Undulatory Riemannian spaces. J. Math. Phys. **4**, 951 (1963).
[67] *C. Lanczos:* Signal propagation in a positive definite Riemannian space. Phys. Rev. **134**, B 476 (1964).
[68] *L. D. Landau* u. *E. M. Lifschitz:* Feldtheorie (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie-Verlag 1963.
[69] *G. Lemmer:* The canonical form of interacting gravitational and spin fields. Nuovo Cimento (10) **37**, 1647 (1965).
[70] *M. Lenoir:* Équations du champ gravitationnel en interaction avec une onde matérielle de spin 1/2 ou 3/2. C. R. Acad. Sc. (Paris) **259**, 3701 (1964).
[71] *H. G. Loos:* Spin connection in general relativity. Ann. Physics (N.Y.) **25**, 91 (1963).
[72] *H. A. Lorentz:* Het beginsel van Hamilton in Einstein's theorie der zwaartekracht. Zittingsversl. Akad. Amsterdam **23**, 1073 (1915).
[73] *H. A. Lorentz:* Over Einstein's theorie der zwaartekracht I, II, III. Zittingsversl. Akad. Amsterdam **24**, 1389, 1759 (1916); **25**, 468 (1916/17).
[74] *D. Lovelook:* Classical relativistic dynamics of "spin" particles. Nuovo Cimento (10) **29**, 1126 (1963).
[75] *E. Lubkin:* Frames and Lorentz invariance in general relativity. Report of the University of California UCRL-9668 (1961).
[76] *A. March:* Raum, Zeit und Naturgesetze. Naturwiss. **31**, 49 (1943).
[77] *M. Mathisson:* Neue Mechanik materieller Systeme. Acta Phys. Polon. **6**, 163 (1937).
[78] *G. Mie:* Die Einsteinsche Gravitationstheorie. Leipzig: Hirzel 1923.
[79] *C. Møller:* Conservation laws and absolute parallelism in general relativity. Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1**, no. 10 (1961).
[80] *C. Møller:* Momentum and energy in general relativity and gravitational radiation. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **34**, no. 3 (1964).
[81] *C. Møller:* The four-momentum of an insular system in general relativity. Nuclear Phys. **57**, 330 (1964).
[82] *J. F. Nye:* Some geometrical relations in dislocated crystals. Acta Met. **1**, 153 (1953).
[83] *H. Pagels:* Spin and gravitation. Ann. Physics (N.Y.) **31**, 64 (1965).
[84] *A. Papapetrou:* Non-symmetric stress-energy-momentum tensor and spin density. Phil. Mag. (7) **40**, 937 (1949).
[85] *A. Papapetrou:* Spinning test-particles in general relativity I. Proc. Roy. Soc. (London) **A 209**, 248 (1951).
[86] *W. Pauli:* Relativitätstheorie. Enc. math. Wiss. **5**, Art. 19 (1921). Neuabdruck. Torino: Boringhieri 1963.
[87] *C. Pellegrini* and *J. Plebanski:* Tetrad fields and gravitational fields. Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **2**, no. 4 (1963).
[88] *A. Peres:* Spinor fields in general covariant theories. Suppl. Nuovo Cimento (10) **24**, 389 (1962).

[89] *A. Peres:* Coulomb and Lorentz gauges in gravitodynamics. Phys. Letters **4**, 58 (1963).

[90] *B. Riemann:* Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Habilitations-Colloquium (1854); Neuabdruck. Darmstadt: Wissenschaftl. Buchgesellschaft 1959.

[91] *V. I. Rodichev:* Twisted space and nonlinear field equations. Soviet Phys.-JETP **13**, 1029 (1961).

[92] *L. Rosenfeld:* Sur le tenseur d'impulsion-énergie. Mém. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sc. **18**, fasc. 6 (1940).

[93] *H. Schaefer:* Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums. Miszellaneen Angew. Mech. (Tollmien-Festschrift) p. 277 (1962).

[94] *E. Schmutzer:* Spinorielle Feldtheorien und Noether-Theorem in der gekrümmten Raum-Zeit. Z. Naturforsch. **19a**, 1027 (1964).

[95] *H.-G. Schöpf:* Über den Energie-Impulstensor Dirac-ähnlicher Felder. Ann. Physik (Leipzig) (7) **1**, 16 (1958).

[96] *J. A. Schouten:* Ricci-calculus; 2nd ed.. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer 1954.

[97] *E. Schrödinger:* Space-time structure; reprinted with corrections. Cambridge: University Press 1960.

[98] *D. W. Sciama:* On a non-symmetric theory of the pure gravitational field. Proc. Cambridge Phil. Soc. **54**, 72 (1958).

[99] *D. W. Sciama:* On the analogy between charge and spin in general relativity. In Recent developments in general relativity p. 415. London — Warszawa: Pergamon Press — PWN 1962.

[100] *D. W. Sciama:* On the interpretation of the Einstein-Schrödinger unified field theory. J. Math. Phys. **2**, 472 (1961).

[101] *D. W. Sciama:* The physical structure of general relativity. Rev. Mod. Phys. **36**, 463, 1103 (1964).

[102] *G. A. Sokolik:* Contribution to the theory of compensating fields. Soviet Phys.-Doklady **8**, 23 (1963).

[103] *G. A. Sokolik:* A spinor formula for the gravitational field. Soviet Phys.-Doklady **9**, 73 (1964).

[104] *G. A. Sokolik* and *N. P. Konopleva:* A constructive theory of compensating fields. Soviet Phys.-Doklady **9**, 60 (1964).

[105] *H. A. Sokolik* and *N. P. Konopleva:* Unified description of interaction. Nuclear Phys. **72**, 667 (1965).

[106] *R. Stojanovitch:* Equilibrium conditions for internal stresses in non-Euclidean continua and stress spaces. Int. J. Engng. Sc. **1**, 323 (1963).

[107] *R. Stojanovitch* and *L. Vujoshevitch:* Couple stress in non Euclidean continua. Publ. Inst. Math. (Beograd) **2** (16), 71 (1962).

[108] *G. Szamosi:* Dynamics of spinning particles in classical and quantum theory. Nuovo Cimento (10) **29**, 677 (1963).

[109] *T. Takabayasi:* Relativistic hydrodynamics of the Dirac matter. Part 1. General theory. Suppl. Progr. Theor. Phys. **4**, 1 (1957).

[110] *A. H. Taub:* Motion of test bodies in general relativity. J. Math. Phys. **5**, 112 (1964).

[111] *M.-A. Tonnelat:* La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements. Paris: Gauthier-Villars 1955.

[112] *M.-A. Tonnelat:* Les théories unitaires de l'electromagnétisme et de la gravitation. Paris: Gauthier-Villars 1965.

[113] *C. Truesdell* and *R. A. Toupin:* The classical field theories. Handbuch der Physik (ed. Flügge) III/1 p. 226. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[114] *R. Utiyama:* Invariant theoretical interpretation of interaction. Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
[115] *W. Voigt:* Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle I. Abh. königl. Ges. Wiss. Göttingen, math. Kl. **34**, 3 (1887).
[116] *H. Weyl:* Raum, Zeit, Materie; Nachdruck der 5. Aufl. (1923). Darmstadt: Wissenschaftl. Buchgesellschaft 1961.
[117] *H. Weyl:* Gravitation and the electron. Proc. Nat. Acad. Sc. (Wash.) **15**, 323 (1929).
[118] *H. Weyl:* Elektron und Gravitation I. Z. Physik **56**, 330 (1929).
[119] *H. Weyl:* Gruppentheorie und Quantenmechanik; 2. Aufl. Leipzig: Hirzel 1931.
[120] *H. Weyl:* A remark on the coupling of gravitation and electron. Phys. Rev. **77**, 699 (1950).
[121] *H. Weyl:* 50 Jahre Relativitätstheorie. Naturwiss. **38**, 73 (1951).
[122] *J. Weyssenhoff:* Über die klassisch-relativistische Behandlung des Spinproblems. In der Max-Planck-Festschrift (ed. Kockel et al.) p. 155. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.
[123] *J. Weyssenhoff* and *A. Raabe:* Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles. Acta Phys. Polon. **9**, 7 (1947).
[124] *E. Wigner:* Symmetry and conservation laws. Phys. Today **17**, March (1964).
[125] *J. Bičák:* On the Rainich geometrization of the vector meson field in the Kibble theory. Czech. J. Phys. **B16**, 95 (1966).
[126] *K. Kuchař:* The Rainich geometrization of fermion fields. Acta Phys. Polon. **28**, 695 (1965).
[127] *J. A. Wheeler:* Geometrodynamics. Topics of Modern Physics I. New York – London: Academic Press 1962.

Institut für Theoretische Physik
der Bergakademie Clausthal
— Technische Hochschule —
3392 Clausthal-Zellerfeld